Baccalauréat ES Amiens [1] juin 1994

Baccalauréat (B) Amiens [2] juin 1994

EXERCICE 1 **5 points**

Soit la fonction f définie sur l'intervalle [1 ; e] par :

$$f\ x \longmapsto x^2 \ln x.$$

Le plan P est muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées).
La courbe représentative de f dans P est notée $\mathcal{C}$.

1. **a.** Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f.
   Étudier son signe.
   b. En déduire le sens de variations de f.
   c. Tracer la courbe $\mathcal{C}$.
   Marquer le point A de $\mathcal{C}$ d'abscisse 1, puis le point B de coordonnées (e : 0).
2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $I = \displaystyle\int_1^{\text{e}} f(x)\,\text{d}x$.
   En déduire la valeur moyenne μ de f sur l'intervalle [1 ; e].
   En donner une valeur approchée à 0,01 près.

EXERCICE 2 **5 points**

À « La Ferme de la Poule Pondeuse », on produit des œufs de trois tailles différentes :
des petits, dans la proportion de 20 % ;
des moyens, dans la proportion de 50 % ;
des gros, dans la proportion de 30 %.
Ils sont de deux qualités :
ordinaire, étiquetés sous la dénomination « œufs frais » ;
supérieure, étiquetés sous la dénomination « œufs extra ».
On a remarqué que :
80 % des petits œufs sont de qualité ordinaire ;
50 % des œufs moyens sont de qualité ordinaire ;
20 % des gros œufs sont de qualité ordinaire.
Dans tout le problème, on suppose que le nombre d' œufs est suffisamment grand pour que le fait de prélever un œuf ne modifie pas ces proportions.

1. On prend un œuf au hasard.
   Quelle est la probabilité pour qu'il soit :
   a. de petite taille et de qualité ordinaire ?
   b. de qualité ordinaire ?
   c. de qualité supérieure ?
2. **a.** Montrer que la probabilité pour un œuf d'être gros et de qualité supérieure est égale à 0,24.

1. Créteil-Lille-Paris-Rouen-Versailles
2. Créteil-Lille-Paris-Rouen-Versailles

b. On remplit au hasard une boîte de douze œufs.
On suppose les choix des œufs indépendants les uns des autres. Quelle est la probabilité pour que cette boîte contienne exactement cinq œufs de la catégorie « gros œufs extra » ?

PROBLÈME **10 points**

On se propose d'étudier le taux d'équipement en **lave-linge des ménages français**.
On a recueilli les informations consignées dans le tableau ci-dessous :

Années x_i	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985
Taux en % y_i	10	25	41	60	69	80	86

Dans les questions suivantes, pour simplifier les calculs, on pose :

$$t_i = \frac{x_i - 1955}{5}$$

où t_i représente le « rang » de l'année d'observation.
On obtient ainsi :

t_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	10	25	41	60	69	80	86

Partie A - Question préliminaire

Le plan est muni d'un repère orthogonal (unités : 2 cm pour 1 unité, sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 10 %, sur l'axe des ordonnées).
Représenter le nuage de points correspondant à la série statistique $\left(t_i\ ;\ y_i\right)$.
Calculer les coordonnées du point moyen G et le placer sur la figure précédente.
Au vu du schéma, on décide d'effectuer deux ajustements successifs, en vue de faire des prévisions.
(*Les questions B et C sont indépendantes.*)

Partie B - Ajustement linéaire

1. Donner une valeur approchée à 0,01 près par défaut du cœfficient de corrélation linéaire de la série $\left(t_i\ ;\ y_i\right)$.
2. Donner une équation de la droite de régression de y en t, par la méthode des moindres carrés. La représenter sur la figure précédente.
3. En utilisant cette représentation graphique, indiquer à partir de quelle année, au moins 95 % des ménages seront équipés en lave-linge.

Partie C - Ajustement logistique

Soit la fonction f, définie pour t réel positif ou nul par :

$$f(t) = \frac{100}{1 + k\mathrm{e}^{at}},$$

où k et a sont des constantes que l'on va déterminer.

1. On impose que la courbe représentative de f passe par le point M de coordonnées (0 ; 10) et le point N de coordonnées (5, 80).
   Traduire ces deux conditions et en déduire les valeurs exactes de k et a, puis la valeur décimale approchée de a à 0,1 près par excès.
2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(t) = \frac{100}{1 + 9\mathrm{e}^{0,7t}}.$$

a. Calculer la limite de f quand t tend vers $+\infty$.

b. Calculer $f'(t)$, où f' désigne la fonction dérivée de f Déterminer son signe, et en déduire le tableau de variation de f.

Après l'avoir recopié, compléter le tableau suivant :

t	0	1	2	3	4	5	6
$f(t)$							

(On indiquera les valeurs décimales approchées de $f(t)$ à une unité près.)

Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f sur la figure précédente.

c. Résoudre l'inéquation :

$$f(t) \geqslant 95.$$

Donner une interprétation de ce résultat.