**Durée : 4 heures**

# Baccalauréat C juin 1974 Amiens

### EXERCICE 1

Soit $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ un repère orthonormé direct, d'axes $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$, d'un plan affine euclidien orienté P.
Soit $R_1$, $R_2$, $R_3$ les rotations affines planes de centres respectifs : $\text{A}_1$ : (2 ; 0), $\text{A}_2$ : (0 ; 2), $\text{A}_3$ : (−2 ; 0) et dont les angles ont pour mesure en radians respectivement $\frac{\pi}{2}$, $\pi$, $\frac{\pi}{2}$.
Soit $S_1$, $S_2$, $S_3$ les symétries orthogonales planes par rapport aux droites d'équations respectives :

$$D_1 : \quad y = 0 \quad D_2 : \quad x + y = 2 \quad D_3 : \quad -x + y = 2.$$

1. Définir analytiquement les applications $R_1$, $R_2$, $R_3$, $S_1$, $S_2$, $S_3$.
2. Déterminer les applications $S_1 \circ S_2$, $S_2 \circ S_3$, $S_3 \circ S_1$.
3. Déterminer l'application $R_1 \circ R_2 \circ R_3$.

### EXERCICE 2

1. Déterminer, dans l'ensemble des nombres complexes, les racines sixièmes du nombre 1 sous forme trigonométrique et sous forme algébrique.
2. Calculer $(1 - \text{i})^6$ ; en déduire les racines sixièmes du nombre 8i.
3. Déduire de la deuxième question la valeur de $\cos \dfrac{\pi}{12}$ et la valeur de $\sin \dfrac{\pi}{12}$

### PROBLÈME

Soit E l'ensemble des applications $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par l'égalité

$$f(x) = (ax + b)\text{e}^{2x} + (cx + d)\text{e}^{-2x}$$

où $a$, $b$, $c$, $d$ sont des réels.

1. On pose

   $$f(x) = (ax + b)\text{e}^{2x} + (cx + d)\text{e}^{-2x}$$

   Calculer les nombres $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ et $f'''(0)$, $f'''(0)$ désigne le nombre dérivé de $f$, d'ordre 3 en 0).
2. Démontrer que l'ensemble E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel F des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que les applications $f_1$, $f_2$, $f_3$, $f_4$ définies par les égalités

   $$f_1(x) = x\text{e}^{2x}, \quad f_2(x) = \text{e}^{2x}, \quad f_1(x) = x\text{e}^{-2x}, \quad f_1(x) = \text{e}^{-2x}$$

   forment une base de l'espace vectoriel E.
   (On pourra remarquer que l'application nulle est dérivable et admet comme dérivée d'ordre quelconque l'application nulle, et utiliser la première question).

**4.** Soit $P$ l'ensemble des applications paires de E, soit $I$ l'ensemble des applications impaires de E,

**a.** déterminer les ensembles $P$ et $I$.

**b.** démontrer que $P$ et $I$ sont des sous-espaces vectoriels de E,

**c.** démontrer que les applications $h_1$ et $h_2$ définies par les égalités :

$$h_1(x) = x\mathrm{e}^{2x} - x\mathrm{e}^{-2x} \quad \text{et} \quad h_2(x) = \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x}$$

forment une base de l'espace vectoriel $P$ et que les applications $h_3$ et $h_4$ définies par les égalités :

$$h_3(x) = x\mathrm{e}^{2x} + x\mathrm{e}^{-2x} \quad \text{et} \quad h_4(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x}$$

forment une base de l'espace vectoriel $I$.

**5.** Soit désormais $\mathrm{E}_1$ l'ensemble des applications $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par l'égalité :

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{2x}$$

où $a$ et $b$ sont des réels.

**a.** Montrer que $\mathrm{E}_1$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E. Montrer que les applications $f_1$ et $f_2$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathrm{E}_1$.

**b.** Soit $g$ l'application définie par l'égalité :

$$\forall f \in \mathrm{E}_1, \quad g(f) = f'.$$

- démontrer que $g$ est un endomorphisme de $\mathrm{E}_1$ (Voir **N. B.**)
- déterminer la matrice de $g$ dans la base $\{f_1,\ f_2\}$ ; en déduire que $g$ est un automorphisme de $\mathrm{E}_1$.
- soit $g^{-1}$ l'application réciproque de $g$ ; vérifier que si on pose $\varphi = g^{-1}(f)$, alors l'application $\varphi$ est une primitive de $f$ ; déterminer la matrice de $g^{-1}$ dans la base $\{f_1,\ f_2\}$.
- on pose : $f(x) = (-2x+1)\mathrm{e}^{2x}$. Déterminer, à l'aide de la question précédente, une primitive de $f$, puis calculer

$$\int_0^2 (-2x+1)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x.$$

avec la précision permise par les tables numériques.

**N. B.** On appelle endomorphisme de $\mathrm{E}_1$ toute application linéaire de $\mathrm{E}_1$ vers $\mathrm{E}_1$.