Durée : 4 heures

Baccalauréat C juin 1975 Amiens

EXERCICE 1

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 2(2+\mathrm{i})z + 6 = 0.$$

Déterminer le module et l'argument de chacune de ses racines.

2. On considère la fonction polynôme P de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ définie par

$$P(z) = z^3 - (11+2\mathrm{i})z^2 + 2(17+7\mathrm{i})z - 42.$$

a. Montrer l'existence d'un réel r tel que $P(r) = 0$.

b. Montrer l'existence d'une fonction polynôme Q telle que

$$(\forall z \in \mathbb{C})\ ; \quad P(z) = (z-r)Q(z).$$

c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

EXERCICE 2

Soit la fonction f de la variable réelle x définie par

$$\begin{array}{lll} \forall x, & x \in]-\infty\ ;\ 0] & f(x) = \dfrac{x}{x-1}, \\ \forall x, & x \in]0\ ;\ 1[& f(x) = x\log x, \\ \forall x, & x \in]1\ ;\ +\infty[& f(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-1}. \end{array}$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 et 1.
2. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé.
3. Soit $a \in]0\ ;\ 1[$. Calculer l'aire D_a du domaine délimité par la courbe (C) et les droites ayant pour équations respectives $x = a$, $x = 1$ et $y = 0$.
   Cette aire D_a a-t-elle une limite quand a tend vers 0.

PROBLÈME

Soit P le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. On appellera $\mathscr{P}$ le plan vectoriel associé à P.

Soit f_λ l'application affine de P dans P laissant O invariant, dont l'application linéaire associée φ_λ a pour matrice, dans la base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2-\lambda \\ \dfrac{\lambda+1}{2} & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Partie A

1. Pour quelles valeurs de λ, f_λ est-elle bijective ?
2. Déterminer, suivant les valeurs de λ, le noyau de φ_λ noté $\ker\varphi_\lambda$. Lorsque le noyau n'est pas réduit au vecteur nul, en donner une base.

3. Déterminer, suivant les valeurs de λ, l'image de φ_λ notée $\text{Im}\,\varphi_\lambda$. En donner une base.

4. Pour quelle valeur de λ, f_λ est-elle involutive ?

5. Déterminer, suivant les valeurs de λ, l'ensemble des points invariants par f_λ. Lorsque cet ensemble est une droite, préciser cette droite par un point et un vecteur directeur.

Partie B

Étude de f_λ pour $\lambda = -1$

1. Déterminer l'ensemble $U = \left\{\overrightarrow{u} \in \mathscr{P} | \varphi_{-1}\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{u}\right\}$.

2. Montrer que les sous-espaces U et $\ker\left(\varphi_{-1}\right)$ sont supplémentaires dans $\mathscr{P}$.

3. En déduire que φ_{-1} est la composée de d'une projection vectorielle et d'une homothétie vectorielle, que l'on déterminera.

4. En déduire que f_{-1} est la composée de d'une projection et d'une homothétie.

Partie C

Étude de f_λ pour $\lambda = -1$

1. Déterminer les réels k pour chacun desquels il existe un vecteur $\overrightarrow{V}$ non nul vérifiant $\varphi_3\left(\overrightarrow{V}\right) = k\overrightarrow{V}$.

2. Pour chaque réel k déterminé au 1. vérifier que l'ensemble $\left\{\vec{u} \in \mathscr{P} | \varphi_3\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{u}\right\}$ est une droite vectorielle.

3. En désignant par k_1 et k_2 les deux réels trouvés en C 1. ($k_1 < k_2$), montrer que qu'il existe une base $\left(\overrightarrow{V_1},\ \overrightarrow{V_2}\right)$ de $\mathscr{P}$ telle que

$$\forall i \in \{1,\ 2\},\ \varphi_3\left(\overrightarrow{V_i}\right) = k_i\overrightarrow{V_i}.$$

4. Montrer que tout point $M' = f_3(M)$ est obtenu en construisant la projection m de M sur la droite passant par O de vecteur directeur $\overrightarrow{V_1}$ suivant la direction donnée par $\overrightarrow{V_2}$, puis en construisant M' tel que $\overrightarrow{mM'} = 2\overrightarrow{mM}$. Faire une figure avec un point M, sa projection m et le point M'.

Partie D

Étude de f_λ pour $\lambda = 0$

1. Montrer que f_0 est une symétrie par rapport à une droite relativement à une direction que l'on précisera.

2. Soit le cercle (C) de centre $\Omega(0\ ;\ -2)$ de rayon 1.

a. Donner une équation de ce cercle dans le repère $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

b. Soit (E) l'image de (C) par f_0. Déterminer une équation de (E) dans le repère $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

c. Montrer que (E) est une ellipse dont on donnera les coordonnées du centre, le demi-grand axe et le demi petit axe.

d. Faire une figure.