Durée : 4 heures

Baccalauréat C Amiens juin 1976

EXERCICE 1

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcll} f(x) & = & \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} & \text{si } x \leqslant 0 \\ f(x) & = & x^2 \text{Log}\, x & \text{si } x > 0 \end{array}\right.$$

(Log désigne la fonction logarithme népérien).

1. Étudier la continuité de f.
2. Étudier la dérivabilité de f.
3. Étudier le sens de variation de f et tracer sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O} ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
4. Calculer l'aire $\mathscr{A}_\alpha$ du domaine plan limité par la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations respectives $y = -1$, $x = 0$ et $x = 1$ avec $0 < \alpha < 1$.
   Quelle est la limite de $\mathscr{A}_\alpha$ lorsque α tend vers 0 ?

EXERCICE 2

Un paquet de treize cartes à jouer comprend six as, trois rois et quatre dames. Les valeurs des cartes sont les suivantes :

— un as quelconque : + 5
— un roi quelconque :+ 2
— une dame quelconque : -1

L'épreuve consiste à tirer simultanément deux cartes de ce jeu. On suppose les tirages équiprobables.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. On considère la variable aléatoire X qui à tout tirage fait correspondre la somme des valeurs des cartes tirées.
   a. Quelle est la loi de probabilité de X ?
   b. Calculer son espérance mathématique, sa variance et son écart-type.

PROBLÈME

On rappelle que $\mathbb{R}^2$ muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel.
On note $\star$ la loi définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (a\,;\, b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \left(a'\,;\, b'\right) \in \mathbb{R}^2, \quad (a\,;\, b) \star (a'\,;\, b') = \left(aa' + \alpha bb'\,;\, ab' + a'b\right)$$

où α est un réel donné.
On pose $\overline{\gamma} = (1\,;\,0)$, $\overline{w} = (0\,;\,1)$ et $\overline{0} = (0\,;\,0)$.
$\mathbb{N}^\star$ désigne $\mathbb{N} - \{0\}$.

Partie A

1. Montrer que, pour tout α réel, $\left(\mathbb{R}^2,\ +,\ \star\right)$ est un anneau commutatif unitaire.
2. Préciser l'ensemble des réels α tels que pour chacun d'eux $\left(\mathbb{R}^2,\ +,\ \star\right)$ soit un corps.

3. Soit $\mathscr{M}_\alpha$ l'ensemble des matrices à coefficients réels de la forme

$$\begin{pmatrix} a & \alpha b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{où } \alpha \text{ est un réel donné.}$$

On note

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que $(\mathscr{M}_\alpha,\ +,\ \times)$ est isomorphe à $\left(\mathbb{R}^2,\ +,\ \star\right)$.

4. Dans cette question, on considère le cas $\alpha = 0$

a. Soit $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$. Former A^2.

Montrer que : $A^2 - 2aA + a^2\mathrm{I} = \mathrm{O}$.

Pour tout n, exprimer A^n en fonction de a, b et n.

Montrer qu'il existe $(a\ ;\ b) \neq (0\ ;\ 0)$ tel que $A^2 = \mathrm{O}$. Que confirme ce dernier résultat ?

b. Soit $u = (a\ ;\ b)$. On pose $u^1 = u$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $u^n = u^{n-1} \star u$. Utiliser a. pour exprimer u en fonction de a, b et n.

c. Résoudre dans $\left(\mathbb{R}^2,\ +,\ \star\right)$ les équations :

$$u^2 + 2u = \overline{0}$$
$$u^2 + u + \overline{\gamma} = \overline{0}$$

d. Résoudre dans $(\mathscr{M}_0,\ +,\ \times)$ les équations :

$$A^2 + 2A = \mathrm{O}$$

$$A^2 + A + \mathrm{I} = \mathrm{O}$$

5. On suppose $\alpha = \dfrac{4}{9}$. Déterminer alors les éléments $(a\ ;\ b)$ de $\mathbb{R}^2 - \left\{\overline{0}\right\}$ pour lesquels l'équation :

$$(a\ ;\ b) \star (x\ ;\ y) = 0$$

admet, dans $\mathbb{R}^2$, des solutions $(x\ ;\ y)$ différentes de $\overline{0}$.

Partie B

Soit $\mathscr{E}$ un espace vectoriel euclidien de dimension 2 muni d'une base orthonormée $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$. On appelle F_α l'ensemble des endomorphismes de $\mathscr{E}$ dont la matrice dans $\mathscr{B}$ appartient à $\mathscr{M}_\alpha$, α étant un réel donné.

1. Dans cette question on considère le cas où $\alpha = 1$.

a. Déterminer l'ensemble P des éléments de F_1 qui sont des projections vectorielles de $\mathscr{E}$ sur des droites vectorielles. Caractériser avec précision chaque élément de P. Déterminer l'ensemble J des éléments de F_1 qui sont des involutions de $\mathscr{E}$. Caractériser avec précision chaque élément de J.

b. Montrer que l'ensemble J muni de la loi $\circ$ de composition des applications est un groupe commutatif. (On pourra établir la table de Pythagore de la loi).

2. On considère maintenant le cas $\alpha = -1$

a. Quels sont les éléments de F_{-1} tels que $a^2 + b^2 = 1$?

b. Soit φ l'élément de F_{-1} défini par $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $b = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On désigne par E un espace affine associé à l'espace vectoriel $\mathcal{E}$, et par $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ un repère orthonormé de E.
Soit f l'application affine de E dans E associée à φ et telle que $f(\text{O}) = \text{O}$ et (Γ) l'ensemble des points du plan dont les coordonnées dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ vérifient l'équation :

$$5x^2 + 5y^2 + 6xy - 8 = 0$$

Déterminer une équation de $f(\Gamma)$ dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
En déduire la nature de $f(\Gamma)$ et représenter graphiquement cet ensemble.

c. En utilisant la définition bifocale d'une conique à centre, montrer que (Γ) est une ellipse que l'on tracera dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

d. On considère dans le plan E rapporté au repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ le mouvement du point m de coordonnées $(x ; y)$ définies par l'application suivante de $\mathbb{R}$ vers E :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x & = & \dfrac{\sqrt{2}}{2}(2\cos 2t + \sin 2t) \\ y & = & \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2t - 2\cos 2t) \end{array}\right.$$

Montrer que le mouvement est périodique.
Trouver la relation, indépendante de t, liant x et y. Que peut-on en déduire pour la trajectoire ?
Préciser sur une période les intervalles de temps où le mouvement est accéléré ou retardé.