# ∽ Baccalauréat C Amiens juin 1977 ∾

**EXERCICE 1** **3 POINTS**

1. Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $n^3 - n$ est divisible par 6.
2. Déterminer les entiers naturels $n$ tels que $n^2 - n$ soit divisible par 6.
3. Déterminer les entiers relatifs $x$ et $y$ tels que $3x + y - 1$ et $x - y - 3$ soient tous deux divisibles par 6.

**EXERCICE 2** **5 POINTS**

Soit E un espace vectoriel euclidien réel de dimension 3, B $= \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$ une base orthonormée de E. On considère les applications linéaires $f_i$ $(i \in \{1, 2, 3, 4\})$ de E dans E définies par :

$$\begin{array}{lllllllll}
f_1\left(\overrightarrow{e_1}\right) & = & 2\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3} & ; & f_1\left(\overrightarrow{e_2}\right) & = & \overrightarrow{e_3} & ; & f_1\left(\overrightarrow{e_3}\right) = \overrightarrow{0}\\
f_2\left(\overrightarrow{e_1}\right) & = & \overrightarrow{e_1} & ; & f_2\left(\overrightarrow{e_2}\right) & = & -\overrightarrow{e_2} & ; & f_2\left(\overrightarrow{e_3}\right) = \overrightarrow{e_3}\\
f_3\left(\overrightarrow{e_1}\right) & = & -\overrightarrow{e_1} & ; & f_3\left(\overrightarrow{e_2}\right) & = & -\overrightarrow{e_2} & ; & f_3\left(\overrightarrow{e_3}\right) = -\overrightarrow{e_3}\\
f_4\left(\overrightarrow{e_1}\right) & = & \overrightarrow{e_2} & ; & f_4\left(\overrightarrow{e_2}\right) & = & \overrightarrow{e_3} & ; & f_4\left(\overrightarrow{e_3}\right) = \overrightarrow{e_1}
\end{array}$$

1. Indiquer, pour chaque application $f_i$ en justifiant votre affirmation, s'il s'agit ou non d'un endomorphisme orthogonal.
2. Pour chaque endomorphisme orthogonal $f_i$ : préciser l'ensemble $F_i$ des vecteurs de E invariants par $f_i$, la nature de $f_i$ ainsi que le nombre minimum de symétries vectorielles orthogonales par rapport à un plan vectoriel en lesquelles on peut décomposer $f_i$.

   Indiquer si une telle application $f_i$ est un endomorphisme orthogonal positif ou négatif.

**PROBLÈME** **12 POINTS**

**Partie A**

P est un plan affine euclidien muni d'un repère orthononné R $= \left(\text{O} ; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.
(Pour les figures, on représentera l'unité par 4 centimètres).

1. Soit $f$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{lll} f(x) & = & x\text{Log}\,|x| \quad \forall x \in \mathbb{R}^{\star}\\ f(0) & = & 0\end{array}\right.$$

   Etudier $f$ (en particulier la continuité et la dérivabilité).
   Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de $f$ dans le repère R ; montrer que $\mathcal{C}$ admet une tangente en 0 que l'on précisera. Construire $\mathcal{C}$ dans le repère R.

2. **a.** On pose $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,\text{d}t \qquad (1)$

   Justifier le fait que $F(x)$ a un sens pour tout $x$ réel.
   L'égalité (1) définit donc une application $F$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

   **b.** À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^x t\text{Log}\,t\,\text{d}t$ pour $x$ strictement positif.

3. **a.** Soit $\varphi$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 1\varphi(x) & = & \dfrac{x^2}{2}\text{Log}\,|x| - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{1}{4} \quad \forall x \in \mathbb{R}^{\star} \\ \varphi(0) & = & \dfrac{1}{4} \end{array}\right.$$

Montrer que $\varphi$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Quelle est la fonction $\varphi'$ dérivée de $\varphi$ ? Justifier le fait que $\varphi = F$ .

**b.** Construire la courbe $\Gamma$ représentant $\varphi$ dans le repère R.

**Partie B**

$\mathbb{C}$ est le corps des nombres complexes. On définit dans $\mathbb{C}$ une loi interne, notée $\star$, de la manière suivante : si $z = x + \text{i}y$, $z' = x' + \text{i}y'$, $\left(x,\ y,\ x',\ y'\right) \in \mathbb{R}^4$, on pose :

$$z \star z' = xx' + \text{i}(xy' + x'y).$$

1. Montrer que $(\mathbb{C}, +, \star)$ est un anneau commutatif unitaire (+ désigne l'addition des nombres complexes).
2. **a.** Déterminer l'ensemble $\mathbb{C}'$ des éléments de $\mathbb{C}$ inversibles pour la loi $\star$. Si $z = x + \text{i}y$ ($x$, $y$ réels) est un élément de $\mathbb{C}'$, montrer que son inverse $\tilde{z}$ pour la loi $\star$ est $\tilde{z} = \dfrac{\overline{z}}{x^2}$, $\overline{z}$ désignant le complexe conjugué de $z$.
En déduire les éléments $z$ de $\mathbb{C}'$ tels que l'on ait : $z = \tilde{z}$.
Montrer que $\mathbb{C}'$ est un groupe abélien pour la loi induite dans $\mathbb{C}'$ par la loi $\star$.

**b.** Soit $G$ le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ défini par :

$$G = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \exists t \in \mathbb{R},\ z = \text{e}^t + \text{i}t\text{e}^t\}$$

(où e est la base du logarithme népérien).
Montrer que $G$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{C}',\ \star)$.
3. Le complexe $z = x + \text{i}y$ a pour image $m(x\ ;\ y)$ dans le plan P.

**a.** Montrer que, dans P, l'ensemble des points images des éléments de $G$ est une partie $\gamma$ de $\mathbb{C}$ que l'on précisera.

**b.** Soit $z$ un élément quelconque de $G$, d'image $m$ dans P.
Soit $\tilde{m}$ l'image de $\tilde{z}$ inverse de $z$ pour la loi $\star$. Que peut-on dire des arguments de $z$ et $\tilde{z}$ ? En déduire une construction de $\tilde{m}$ connaissant le point $m$ de $\gamma$. (Faire une figure en supposant $m$ distinct de A).

**c.** Soit $z$ et $z'$ deux éléments de $G$. On pose $Z = z \star z'$, On appelle $m$, $m'$, $M$, A les points de P d'affixes respectives $z$, $z'$, $Z$, 1.
Soit $Z'$ l'affixe du point $M'$ transformé de $m'$ dans la similitude plane directe de centre O transformant A en $m$. Exprimer $Z'$ en fonction de $z$ et $z'$. Montrer que $M$ et $M'$ ont la même ordonnée.
En déduire une construction de l'image $M$ de $Z$ connaissant les images $m$ et $m'$ des éléments $z$ et $z'$ de $G$. (Faire une figure : on représentera les points A, $m$, $m'$ sur $\gamma$ ; on marquera les points $M$ et $M'$ ; la figure sera faite en supposant A, $m$, $m'$, $m$ distincts),
4. Soit $z_0$ un élément donné de l'ensemble $\mathbb{C}'$ ; on considère l'application $f_{z_0}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f_{z_0}(z) = z_0 \star z.$$

**a.** Montrer que $f$ est un automorphisme de $\mathbb{C}$ considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ,

**b.** Déterminer l'ensemble des nombres complexes invariants par $f_{z_0}$. Discuter,

**c.** Déterminer et caractériser les automorphismes $f$ involutifs.

**d.** Soit F l'ensemble des automorphismes $f_{z_0}$ : $F = \left\{f_{z_0} \mid z_0 \in \mathbb{C}'\right\}$.
Montrer que $(F,\ \circ)$ est isomorphe à $(\mathbb{C}',\ \star)$, En déduire la structure de $(F,\ \circ)$, $\circ$ étant la loi de composition des applications.