∽ Baccalauréat C Amiens juin 1979 ∾

EXERCICE 1 **3 POINTS**

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - (3+4\mathrm{i})z + (-1+5\mathrm{i}) = 0.$$

On désigne par z' et z'' les racines de cette équation.

2. Soit P un plan affine orienté rapporté à un repère orthonormé direct. Au point de coordonnées $(x\,;\,y)$ on associe son affixe $z = x + \mathrm{i}y$.
Soit A le point d'affixe z' et B celui d'affixe z''. Déterminer les points C tels que le triangle ABC soit équilatéral.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcll} f(x) & = & -x\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \leqslant 0\\ f(x) & = & x\log x & \text{si } x > 0.\end{array}\right.$$

1. Déterminer la limite de f lorsque x tend vers zéro par valeurs positives.
Étudier la continuité de f.
Étudier les variations de f et tracer sa courbe $(\mathscr{C})$ dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. On précisera les demi-tangentes en O.
2. Montrer que la restriction φ de f à $I = \left[-1\,;\,\mathrm{e}^{-1}\right]$ permet de définir une bijection de I sur $\varphi(I)$.
Tracer la courbe représentative (Γ) de φ^{-1} dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
Déterminer l'ensemble de dérivabilité de φ^{-1} et calculer la valeur de la dérivée de φ^{-1} en $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

PROBLÈME **12 POINTS**

On désigne par P un plan vectoriel euclidien dont une base orthonormée est $\left(\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ et par $\mathscr{P}$ un plan affine associé à P; soit $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ un repère de $\mathscr{P}$.
On considère une application affine f qui à tout point $M(x\,;\,y)$ de $\mathscr{P}$ associe le point $M_1\left(x_1\,;\,y_1\right)$ de $\mathscr{P}$ et on désigne par F l'endomorphisme associé à f :
soit $\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}$ la matrice de F dans la base $\left(\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
Pour tout point M de $\mathscr{P}$ on note $M1 = f(M); M_2 = f\left(M_1\right); M_3 = f\left(M_2\right); M_4 = f\left(M_3\right)$ et G l'isobarycentre des points M, M_1, M_2 et M_3.

Partie A

1. Démontrer que $F^2 = -\mathrm{I_P}$ si et seulement si

$$a + d = 0 \quad \text{et} \quad a^2 + bc = -1.$$

($\mathrm{I_P}$ désigne l'application identique de P, et $F^2 = F \circ F$.)

2. Dans cette partie, $a = 2$, $b = 1$ et $F^2 = -\mathrm{I_P}$.

a. Écrire la matrice de F dans la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. En déduire que l'application affine f admettant F comme endomorphisme associé et telle que $f(\mathrm{O}) = \mathrm{O}'$, O' étant le point de coordonnées $(2 ; 0)$, est définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & 2x - 5y + 2 \\ y_1 & = & x - 2y. \end{array}\right.$$

Démontrer que f est bijective.

b. On désigne par $D' = f(D)$ l'image par f d'une droite quelconque D du plan P. Démontrer que D et D' ne sont pas parallèles.

En déduire que, quel que soit le point M de $\mathscr{P}$, les points M, M_1, M_2, lorsqu'ils sont distincts, ne sont pas alignés.

c. Préciser la nature des applications :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f^2 & = & f \circ f, \\ f^4 & = & f^2 \circ f^2. \end{array}\right.$$

d. Soit $M(x\ ;\ y)$ un point quelconque de P. En utilisant le A 2. c., déterminer les coordonnées du point G isobarycentre de M, M_1,
M_2 et M_3.

En déduire que le point G est indépendant du choix de M et que G est le seul point invariant par f.

e. Faire une figure en indiquant les situations respectives des points M, M_1,
M_2 et M_3 lorsque M est le point de coordonnées $(2 ; 1)$.

Partie B

Soit E l'ensemble des applications affines f de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ telles que $f^4 = \mathrm{I}_{\mathscr{P}}$.
($\mathrm{I}_{\mathscr{P}}$ est l'application identique de $\mathscr{P}$.)
Soit F l'endomorphisme associé à f.

1. Quelle propriété doit vérifier l'endomorphisme F^2 ? Quelle peut-être par suite sa nature ?
Démontrer que F^2 ne peut pas être une symétrie vectorielle par rapport à une droite vectorielle D (de base $\vec{u}$) de direction une droite vectorielle D′ (de base $\vec{v}$) (D′ étant distincte de D).
(On pourra utiliser le déterminant de la matrice F^2 dans la base $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$).
En déduire les possibilités pour F^2.
2. Démontrer que le point G défini dans la question A 2. d. est invariant par toute application f de E.

Partie C

On considère l'application f de P dans P laissant invariant le point O et telle que l'endomorphisme associé F ait pour matrice dans la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que f est un élément de E . Exprimer x_1 et y_1 en fonction de x et y.
2. Soit les courbes $\mathrm{C}_{\alpha\beta}$ d'équation $\alpha x^2 + \beta xy + y^2 = 1$ (α et β étant deux réels donnés).

a. Déterminer l'équation des courbes $\mathrm{C}'_{\alpha\beta}$, images par f des courbes $\mathrm{C}_{\alpha\beta}$.

b. Déterminer α et β pour que la courbe $C_{\alpha\beta}$ soit globalement invariante par f.
Démontrer que la courbe ainsi obtenue est la réunion de deux courbes γ_1 et γ_2 d'équations respectives :

$$\begin{array}{rcll} y & = & g_1(x) = -x + \sqrt{1-x^2} & \text{pour } \gamma_1 \\ y & = & g_2(x) = -x - \sqrt{1-x^2} & \text{pour } \gamma_2 \end{array}$$

Étudier la fonction g_1. Construire γ_1.
En déduire γ_2 par une transformation simple que l'on précisera.
M étant un point quelconque de $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, indiquer sur la figure les points $M, f(M), f^2(M), f^3(M)$.

3. De façon générale, on recherche les courbes $C_{\alpha\beta}$ telles que leurs images par f aient pour équation :

$$k\left(\alpha x^2 + \beta xy + \gamma^2\right) = 1.$$

Démontrer que deux valeurs seulement sont possibles pour k. En déduire qu'on obtient d'une part la courbe obtenue au 2. et d'autre part un ensemble de courbes dont on donnera l'équation en fonction d'un seul paramètre (α par exemple).

N.B.- Les parties B et C sont indépendantes.