Baccalauréat C Amiens juin 1981

EXERCICE 1 **4 POINTS**

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide :
   a. Montrer que 1 981 et 1 815 sont premiers entre eux.
   b. Déterminer deux entiers relatifs a et b tels que $1981a + 1815b = 1$.
2. En déduire que dans $\mathbb{Z}/1981\mathbb{Z}$, $\overline{1815}$ admet un inverse que l'on déterminera.
3. Résoudre alors dans $\mathbb{Z}/1981\mathbb{Z}$ l'équation $\overline{1815}x + \overline{1515} = 732$.
   N.B.- $\overline{n}$ désigne la classe de l'entier n dans l'ensemble $\mathbb{Z}/1981\mathbb{Z}$.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien rapporté au repère $\left(\text{O} ; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ orthonormé direct. Soit f l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point M de coordonnées $(x ; y)$ dans le repère $\left(\text{O} ; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, associe la point M' de coordonnées $\left(x' ; y'\right)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' & = & \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' & = & \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{array}\right.$$

1. **a.** Montrer que f est bijective et déterminer l'ensemble des points invariants par f.
   b. Déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ tels que O, M, M' soient alignés.
2. On désigne par M_1 et M_2 les projections orthogonales du point M respectivement sur les droites $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}\right)$ et $\left(\text{O}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. Montrer que M' est le transformé de M_1 dans une rotation de centre M_2 dont on déterminera une mesure de l'angle.

PROBLÈME **12 POINTS**

Partie A

Pour tout entier naturel n, non nul, on considère la fonction f_n définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f_n(x) = \left\{\begin{array}{l l l} x^n \log x & \text{si} & x > 0 \\ 0 & \text{si} & x = 0. \end{array}\right.$$

1. Étudier les fonctions f_1 et f_2 et construire leur représentation graphique respective $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ dans un repère orthonormé du plan $\left(\text{O} ; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ (on prendra 4 cm pour unité de longueur). Préciser la position relative de $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$.
2. Prouver que, pour tout n, f_n est intégrable sur $[0 ; 1]$. On définit, alors, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n = \int_0^1 f_n(x)\,\text{d}x.$$

3. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive de f_n sur $]0 ; 1]$.
   b. En déduire une primitive de f_n sur $[0 ; 1]$.
   c. Montrer que $u_n = -\dfrac{1}{(n+1)^2}$ et déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

d. Soit D le sous-ensemble du plan constitué des points M dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ dans $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$ vérifient $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x)$.
Calculer, en centimètres carrés, l'aire de D.

Partie B

Soit g la fonction, définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x \log x}{x^2+1} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que g est intégrable sur $[0\,;\,1]$.

2. Soit x un réel quelconque.

a. Calculer pour tout n de $\mathbb{N}$ la somme

$$x - x^3 + x^5 - x7 + \cdots + (-1)^n \times x^{2n+1}.$$

b. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{x}{1+x^2} = x - x^3 + \cdots + (-1)^n \times x^{2n+1} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{1+x^2}.$$

3. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = u_1 - u_3 + \cdots + (-1)^n u_{2n+1} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{f_{2n+3}(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

4. On pose pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$S_n = u_1 - u_3 + \cdots + (-1)^n u_{2n+1}.$$

a. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \left|\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x - S_n\right| \leqslant -u_{2n+3}$.

b. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

c. Déterminer un entier n_0 tel que

$$\left|\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x - S_{n_0}\right| \leqslant 10^{-2}.$$

En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près de $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie C

Soit G la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$G(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Étudier la dérivabilité de G et son sens de variation.

2. a. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, \quad t \geqslant 1, \quad \dfrac{1}{2t^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2+1} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.

b. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x > 1, \quad \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\log t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant G(x) \leqslant \int_1^x \frac{\log t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

c. Calculer pour tout $x > 1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{\log t}{t}\,\mathrm{d}t$.

d. Déduire de ce qui précède $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} G(x)$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{G(x)}{x}$. (On pourra poser $X = \sqrt{x}$.)

3. Donner l'allure de la courbe représentative de G. Préciser la tangente au point d'abscisse 1 et la nature de la branche infinie.

La courbe a-t-elle une tangente au point d'abscisse 0 ?

N. B.- Pour obtenir une valeur approchée de $G(0)$ on utilisera B 4. c.

Pour obtenir une valeur approchée de $G(2)$ on utilisera l'encadrement obtenu au C 2.