Durée : 4 heures

Baccalauréat C 1982 Amiens

EXERCICE 1 **4 points**

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et $B = \left(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_3}\right)$ une base orthonormée de E.

Soit φ l'endormorphisme de E défini analytiquement par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& \frac{1}{2}\left(-x+z\sqrt{3}\right)\\ y' &=& -y\\ z' &=& \frac{1}{2}\left(-x\sqrt{3}-z\right)\end{array}\right.$$

1. Montrer que φ est une isométrie de E.
2. **a.** Chercher le sous-espace vectoriel U de E des vecteurs transformés par φ en leurs opposés. On en donnera une base.

   b. Montrer que les sous-espace U$'$ orthogonal de U est globalement invariant par φ. On en donnera une base.

   c. Le plan engendré par les vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ étant supposé orienté par la base directe $\left(\overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{e_1}\right)$, préciser la restriction de φ à cette base.
3. En conclure qu'il existe deux isométries φ_1 et φ_2 de E que l'on caractérisera avec précision telles que

$$\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_2 \circ \varphi_1.$$

EXERCICE 2 **4 points**

1. Soit φ l'application de $\mathbb{R}^\star$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star, \quad \varphi(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + 1.$$

   Déduire de l'étude des variations de φ dans $\mathbb{R}^\star$, celle du signe de $\varphi(x)$ dans $\mathbb{R}^\star$.
2. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(0) &=& 0\\ f(x) &=& \dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^\star\end{array}\right.$$

   a. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en zéro.

   b. Déterminer le tableau de variations complet de f dans $\mathbb{R}$ (on utilisera le 1 pour trouver le signe de $f'(x)$.

   c. Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'un plan affine euclidien.
   Étudier la limite de $f(x) - \frac{x}{2}$ quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$. Montrer que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote et construire $(\mathcal{C})$ dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. On représentera la courbe en choisissant, une unité de longueur égale à 5 cm).

Problème **12 points**

Partie préliminaire

1. (P) est un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$.
Soit φ l'application de (P) dans (P) définie analytiquement par :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' &=& y-4\\ y' &=& x+4.\end{array}\right.$$

Montrer que φ est une isométrie affine de (P) que l'on précisera.

2. On appelle f_a la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f_a(x)=\dfrac{(a+2)x}{x+2-a},$$

a étant un paramètre réel appartenant à $\mathbb{R}-\{-2~;~+2\}$ et on appelle $(\mathcal{C}_a)$ la courbe représentative de f_a dans le repère $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$ de (P).

a. Montrer que, pour tout a de $\mathbb{R}-\{-2~;~+2\}$, $(\mathcal{C}_a)$ est globalement invariante par φ.

b. Montrer que toutes les courbes $(\mathcal{C}_a)$ passent par deux points indépendants de a.

c. Étudier les variations de f_a et construire dans le repère $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$ les courbes $(\mathcal{C}_{-1})$ et $\left(\mathcal{C}_{\frac{3}{2}}\right)$. (On utilisera pour la représentation graphique une unité de longueur égale à 2 cm.)

Partie A

Soit ω_a le point de coordonnées $(a-2~;~a+2)$ dans le repère $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$ de (P) et les vecteurs : 1 -+

$$\overrightarrow{I}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{\imath}-\overrightarrow{\jmath}\right)\quad\text{et}\quad\overrightarrow{J}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{\imath}+\overrightarrow{\jmath}\right).$$

1. Montrer que $\left(\omega_a,~\overrightarrow{I},~\overrightarrow{J}\right)$ est un repère orthonormé de (P).
2. Déterminer une équation de $(\mathcal{C}_a)$ dans le repère $\left(\omega_a,~\overrightarrow{I},~\overrightarrow{J}\right)$.
En déduire que $(\mathcal{C}_a)$ est une hyperbole équilatère (on notera A et A$'$ les points d'intersection de l'hyperbole avec ses axes de symétrie ; points appelés sommets de l'hyperbole).
3. **a.** Soit D la droite d'équation $y=x+4$ dans le repère $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$. Montrer que par tout point M de D, à l'exclusion de points que l'on précisera, passe une courbe $(\mathcal{C}_a)$ unique.

b. Montrer que $(\mathcal{C}_a)$ a ses sommets sur D si et seulement si $|a|>2$.

c. En déduire l'ensemble des points A et A$'$ lorsque a varie dans $]-\infty~;~-2[\cup]2~;~+\infty[$.

4. On suppose ici $|a|<2$.
Évaluer en fonction de a les distances $\omega_0\omega_a$ et ω_aA ; en déduire la distance ω_0A. Déterminer l'ensemble des points A et A$'$ lorsque a varie dans $]-2~;~2[$.

Partie B

Dans cette partie on suppose a élément de l'intervalle I $=[0\,;\,2[$.
Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par U_0 et la relation de récurrence :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad U_{n+1}=f\left(U_n\right).$$

On suppose que $U_0\in[0~;~2a]$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = f_a(U_n)$.
On suppose que $U_0 \in [0\ ;\ 2a]$.
En déduire que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est partout définie dans $\mathbb{N}$.
Que peut-on dire de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $U_0 = 0$ ou si $U_0 = 2a$?

2. On suppose que U_0 est différent de 0 et $2a$ (par suite a est différent de 0).

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (U_n \neq 0 \quad \text{et} \quad U_n \neq 2a)$.

b. Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_n = \frac{U_n}{U_n - 2a}$$

Montrer que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison en fonction de a.
Étudier l'existence et la valeur de la limite de $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en déduire l'existence et la valeur de la limite de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

N. B. Les parties A et B sont indépendantes.