

Baccalauréat C groupe 1¹ juin 1984

EXERCICE 1

5 POINTS

Soit $z_0 = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$.

1. On pose $\alpha = z_0 + z_0^4$ et $\beta = z_0^2 + z_0^3$.
 - a. Montrer que $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$ et en déduire que α et β sont solutions de l'équation (1) $X^2 + X - 1 = 0$.
 - b. Déterminer α en fonction de $\cos \frac{2\pi}{5}$.
 - c. Résoudre l'équation (1) et en déduire la valeur de $\cos \frac{2\pi}{5}$.
2. On appelle A_0, A_0, A_0, A_0, A_0 les points d'affixes respectives $1, z_0, z_0^2, z_0^3, z_0^4$ dans le plan affine rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
 - a. Soit H le point d'intersection de la droite A_1A_4 avec l'axe (O, \vec{u}) . Montrer que $\overline{OH} = \cos \frac{2\pi}{5}$.
 - b. Soit \mathcal{C} le cercle de centre Ω d'affixe $(-\frac{1}{2})$ passant par B d'affixe (i). Ce cercle coupe l'axe (O, \vec{u}) en M et N. (On appellera M le point d'abscisse positive). Montrer que $\overline{OM} = \alpha$, $\overline{ON} = \beta$ et que H est le milieu de [OM].
 - c. En déduire une construction simple du pentagone régulier dont on connaît le centre O et un sommet A_0 .

EXERCICE 2

5 POINTS

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit (E) l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient l'équation

$$15x^2 + 13y^2 - 2xy\sqrt{3} = 768$$

et soit f l'application de P dans P qui à un point M de coordonnées $(x; y)$ associe M' de coordonnées $(x'; y')$ tel que

$$\begin{cases} x' &= \frac{1}{4}(x + y\sqrt{3}) \\ y' &= \frac{1}{4}(-\sqrt{3}x + y) \end{cases}$$

1. Montrer que f est une similitude plane directe que l'on caractérisera. Déterminer f^{-1} .
2. Déterminer une équation de $(f(E))$ et montrer que $(f(E))$ est une ellipse dont on précisera les sommets, les foyers, et l'excentricité.
3. En déduire que (E) est l'ensemble des points M du plan tels que $MF_1 + MF'_1 = 16$ où F_1 et F'_1 sont deux points que l'on déterminera.

PROBLÈME

10 POINTS

1. Amiens, Rouen

Partie A

On considère l'équation différentielle

$$y'(x) - y(x) = x + 2 \quad (\text{E})$$

1. Déterminer une fonction affine a solution de (E).
2. Montrer que si y est solution de (E), alors $y - a$ est solution d'une équation différentielle homogène du premier ordre. La résoudre.
3. Déterminer toutes les solutions de (E).

Partie B

Soit f la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = e^x - x - 3.$$

1. Étudier les variations de la fonction f .
2. Soit (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 - a. Montrer que (\mathcal{C}) admet une asymptote D dont on précisera l'équation. Préciser la position de la courbe (\mathcal{C}) par rapport à cette asymptote.
 - b. Construire (\mathcal{C}) (unité : 2 cm).
3. Déterminer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ du domaine limité par (\mathcal{C}) , D et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \alpha$, avec $\alpha < 0$.
Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \mathcal{A}(\alpha)$.
4. Soit f_1 la restriction de f à l'intervalle $I = [0; +\infty[$.
 - a. Montrer que f_1 est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.
 - b. Étudier la continuité et la dérivabilité de f_1^{-1} . Construire sa courbe représentative (\mathcal{C}') dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 - c. Montrer que l'équation $f_1(x) = 0$ admet une solution unique que l'on encadrera par deux entiers consécutifs.

Partie C

Soit g la fonction définie par

$$g(x) = \ln(x + 3).$$

1. Étudier les variations de g et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité : 2 cm).
2. Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \ln(u_n + 3) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

- a. En utilisant la croissance de g , étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
- b. Montrer que la suite (u_n) est majorée par 2.
- c. En déduire que cette suite est convergente. Soit ℓ sa limite.

3. Soit (v_n) la suite définie par

$$\begin{cases} v_0 & = & 2 \\ v_{n+1} & = & \ln(v_n + 3) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

- a. En utilisant la croissance de g , étudier le sens de variation de la suite (v_n) .
 - b. Montrer que la suite (v_n) est minorée par 1.
 - c. En déduire que cette suite est convergente. Soit ℓ' sa limite.
4. Montrer que $\ell = \ell'$.

a. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n - u_n = \int_{u_{n-1}}^{v_{n-1}} \frac{1}{t+3} dt.$$

b. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq v_n - u_n \leq \frac{1}{4^n}.$$

c. En déduire une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.