

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Amiens, Rouen juin 1985 ¹ ∞

EXERCICE 1

4 points

On désigne par \mathbb{C}^* le corps des nombres complexes \mathbb{C} privé de zéro.
Soit f l'application de \mathbb{C}^* dans \mathbb{C} définie par

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

pour tout z élément de \mathbb{C}^* .

1. Calculer les parties réelle et imaginaire de $f(z)$ en fonction des module et argument de z .
2. Soit φ l'application du plan privé de l'origine O dans le plan qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $f(z)$.

Quelle est la nature de l'image par φ d'un cercle de centre O et de rayon R ?

EXERCICE 2

5 points

L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit f l'application affine de E dans E qui, au point M de coordonnées $(x; y; z)$, associe le point $M' = f(M)$ de coordonnées $(x'; y'; z')$ définies par :

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-1) \\ y' = y + 1 \\ z' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}z + \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}) \end{cases}$$

1. Montrer que f est une isométrie et déterminer l'ensemble des points invariants par f .
2.
 - a. Montrer que l'ensemble des vecteurs invariants par l'endomorphisme associé à f est une droite vectorielle dont on précisera une base (\vec{U}_0) .
 - b. Déterminer l'ensemble D des points M tels que $\overrightarrow{Mf(M)}$ soit colinéaire à \vec{U}_0 et calculer $\overrightarrow{Mf(M)}$ pour tout point M de D .
3.
 - a. Soit t la translation de vecteur \vec{j} . Montrer que l'application $r = t^{-1} \circ f$ admet une droite de points invariants.
 - b. Soit \mathcal{P} le plan d'équation $y = 0$ et A le point de coordonnées $(1; 0; 1)$.
On rapporte \mathcal{P} au repère $\mathcal{R} = (A, \vec{i}, \vec{k})$.
Montrer que, pour tout point M de \mathcal{P} , $r(M)$ appartient à \mathcal{P} .
On note r' la restriction de r à \mathcal{P} . Pour M de coordonnées $(X; Z)$ dans \mathcal{R} , déterminer les coordonnées $(X'; Z')$ dans \mathcal{R} de $r'(M)$ en fonction de X et Z .
Caractériser r' ; on supposera que le repère \mathcal{R} est direct.
4. En déduire que f est un vissage dont on déterminera l'axe, le vecteur et le cosinus de l'angle.

PROBLÈME

11 points

1. Amiens, Rouen

A.

1. Étudier les variations de l'application f de $]0; +\infty[$ dans \mathbb{R} définie par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

2. Dédurre de l'étude précédente le nombre de solutions réelles de l'équation $e^{ax} - x = 0$ suivant les valeurs du nombre réel a .

B.

On considère, pour a réel donné, la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie de la manière suivante :

$$U_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = e^{aU_n}.$$

1. Pourquoi peut-on affirmer que si la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, sa limite u est solution de l'équation $e^{ax} - x = 0$?
2. On suppose $a > 0$.

a. Montrer par récurrence que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

b. Que peut-on dire alors de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$? si $a > \frac{1}{e}$?

c. On suppose que $0 \leq a \leq \frac{1}{e}$.

Montrer par récurrence sur l'entier n que $U_n \leq e$.

Que peut-on dire alors de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

3. On suppose $a < 0$.

a. p et n étant deux entiers naturels quelconques, exprimer

$$\int_{U_p}^{U_n} e^{ax} dx \quad \text{en fonction de } U_{p+1} \text{ et } U_{n+1}.$$

b. En utilisant la question précédente, comparer les signes de $U_{n+2} - U_n$ et $U_{n+1} - U_{n-1}$. En déduire que $U_{n+2} - U_n$ et $U_n - U_{n-2}$ sont de même signe.

c. Quels sont les signes de $U_2 - U_0$ et $U_3 - U_1$?

Pour tout entier n , soient $V_n = U_{2n}$ et $W_n = U_{2n+1}$.

Montrer que les suites $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones.

d. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_n \leq 1$. Les suites $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont-elles convergentes ?

e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - U_n| \leq |a|^n |U_1 - U_0|.$$

Que peut-on en conclure pour les suites $(U_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(U_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ si $-1 < a < 0$?

Qu'en résulte-t-il alors pour la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$?