∽ Baccalauréat C Amiens septembre 1984 ∾

EXERCICE 1

On considère un triangle isocèle ABC de côté BC = 2a, AC = AB = 30, a étant un réel positif fixé. On note A' le milieu de BC et H l'orthocentre du triangle.

1. Soit θ une mesure de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$. Montrer que $\cos\theta = \dfrac{7}{9}$;
2. Soit B$'$ la projection orthogonale de B sur la droite (AC).
   Calculer $\dfrac{\overline{\text{B}'\text{A}}}{\overline{\text{B}'\text{CA}}}$.
   En déduire deux réels u et v tels que le point B$'$ soit le barycentre du système : (A, u) ; (C, v).
3. En s'aidant de la deuxième question, déterminer trois réels a, b, c tels que le point H soit le barycentre du système : $\{(\text{A}, a) ; (\text{B}, b) ; (\text{C}, c)\}$.

EXERCICE 2

Soit, dans le plan affine euclidien P, un carré ABCD, de côté de longueur c, où $c \in \mathbb{R}_+^\star$.
On considère un réel α et f_α l'application du plan dans lui-même

$$f_\alpha \left\{ \begin{array}{lcl} \text{P} & \to & \text{P} \\ M & \longmapsto & M' \end{array} \right.$$

telle que $\overrightarrow{MM'} = \alpha\,\overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}} + \alpha\,\overrightarrow{M\text{D}}$.

1. Déterminer, suivant les valeurs de α, la nature et les éléments caractéristiques de f_α.
2. Déterminer, puis construire l'ensemble E_1 des points M du plan P tels que :

$$M\text{A}^2 + M\text{B}^2 + M\text{C}^2 + M\text{D}^2 = 4c^2.$$

3. Déterminer, puis construire l'ensemble E_2 des points M du plan P tels que :

$$\left\| \overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} - \overrightarrow{M\text{C}} + \overrightarrow{M\text{D}} \right\| = \left\| \overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}} + \overrightarrow{M\text{D}} \right\|$$

EXERCICE 3

Les parties B et C sont indépendantes, l'une de l'autre.
La partie C est, dans une large mesure, indépendante de A.
Soit le plan $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormal $\mathscr{R} = \left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Dans tout le problème on note, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, f_p la fonction définie par :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f_p(x) & = & x^p \ln|x| \quad \text{si } x \in \mathbb{R}^\star \\ f_p(0) & = & 0. \end{array} \right.$$

Soit $\mathscr{C}_p$ la courbe représentative de f_p dans $\mathscr{R}$.

Partie A

1. Étudier, suivant les valeurs de p, la continuité et la dérivabilité de f_p en 0.
2. Étudier la parité de f_p. Calculer $f_p(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$.

3. **a.** Calculer la limite de f_p quand x tend vers $+\infty$.
   b. Étudier les variations de f_p (on distinguera quatre cas : $p < 0, p = 0, p = 1, p > 1$).
4. En calculant un développement limité d'ordre 1 de $(1+h)^p$ en zéro, et un développement limité d'ordre 2 de $\ln(1+h)$ en zéro, déduire un développement limité d'ordre 2 de $f_p(1+h)$ en zéro.
   En déduire l'équation de la tangente D à toutes les courbes $\mathscr{C}_p$ au point d'abscisse 1, ainsi que les positions relatives de $\mathscr{C}_p$ et de D suivant les valeurs de p.
5. Donner l'allure des courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_{-2}$. On fera trois figures différentes, et l'on prendra 2 cm comme unité.
6. Pour tout $p \in \mathbb{N}^{\star}$, déterminer, en intégrant par parties, l'aire de la partie de plan limitée par la droite $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}\right)$, les droites d'équations $x = 1$ et $x = \text{e}^{\frac{1}{p+1}}$ et la courbe $\mathscr{C}_p$.

Partie B

On considère la fonction $g = f \circ \sin$.

On a donc $\left\{\begin{array}{lcl} g(x) & = & \sin x \ln|\sin x| \quad \text{si } x \neq k\pi \\ g(k\pi) & = & 0. \end{array}\right.$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de g en 0.
2. Montrer qu'il existe un seul $x_0 \in \left[0\,;\, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin x_0 = \dfrac{1}{\text{e}}$.
3. Étudier les variations de g en précisant la période et la parité ; puis tracer la courbe représentative de g sur une période, dans le repère $\left(\text{O}\,;\, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ (unité : 2 cm).

Partie C

On considère la suite $\left(u_p\right)$ définie par u_0 et pour tout p appartenant à $\mathbb{N}$

$$u_{p+1} = f_1\left(u_p\right).$$

1. Étudier $\left(u_p\right)$ dans le cas où $u_0 = 0$; $u_0 = \text{e}$; $u_0 = -\text{e}$.
2. Si $u_0 = \dfrac{1}{\text{e}}$ ou $u_0 = -\dfrac{1}{\text{e}}$, montrer que $\left(u_p\right)$ est une suite géométrique.
   Est-elle convergente ?
3. On se place dans le cas où $|u_0| > \text{e}$.
   a. Si $u_0 > \text{e}$, montrer que $u_1 > u_0 > \text{e}$ et, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^{\star}$, $u_p > u_{p-1} > \text{e}$.
   b. Si $u_0 < -\text{e}$, montrer que $u_1 < u_0 < -\text{e}$ et, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^{\star}$, $u_p < u_{p-1} < -\text{e}$.
   Dans ces cas a. b. montrer que $\left|u_p\right| \geqslant |u_0| (\ln|u_0|)^p$.
   La suite $\left(u_p\right)$ est-elle convergente ?