

♣ Baccalauréat C Amiens septembre 1972 ♣

EXERCICE 1

Soit l'équation (E) suivante, à coefficients complexes,

$$(E) \quad z^3 - z^2(6 + 3i) + (21 + 19i) - 26(1 + i) = 0.$$

Sachant qu'elle admet une racine réelle, et une seule, calculer cette racine. Résoudre ensuite l'équation dans le corps \mathbb{C} .

EXERCICE 2

L'espace (\mathcal{E}) est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère l'application f , de (\mathcal{E}) dans (\mathcal{E}), qui au point $M(x; y; z)$ associe le point $M'(X; Y; Z)$ tel que

$$\begin{cases} X &= x + 2y + 3z, \\ Y &= x \quad + 2z, \\ Z &= 2y + z. \end{cases}$$

1. En étudiant la relation réciproque de l'application f , déterminer la nature de f . Définir géométriquement l'image $f(\mathcal{E})$ de (\mathcal{E}) par f .
2. Que sont les images réciproques, $f^{-1}(M')$, des points M' de $f(\mathcal{E})$? Les définir géométriquement.
3. Existe-t-il des points M tels que les trois points O , M et M' soient alignés? Définir géométriquement les sous-ensembles de (\mathcal{E}) ainsi trouvés.

PROBLÈME

Partie A

Soit (\vec{i}, \vec{j}) une base orthonormée du plan vectoriel euclidien, k un nombre réel et f une application linéaire du plan dans lui-même définie par

$$f(\vec{i}) = \vec{i}' = k\vec{i} + \vec{j} \quad \text{et} \quad f(\vec{j}) = \vec{j}' = \vec{i} - k\vec{j}.$$

1. Montrer que le couple (\vec{i}', \vec{j}') est une base du plan vectoriel. Écrire la matrice N de f dans la base (\vec{i}, \vec{j}) .
2. Calculer la matrice $N^2 = N \times N$. En déduire la nature de l'application $f \circ f$.

Partie B

Dans le plan affine euclidien rapporté au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère l'application affine T associée à l'application f et telle que l'image du point O par T soit le point A de coordonnées $(1; -1)$ [$T(O) = A$].

1. Au point M de coordonnées $(x; y)$, T fait correspondre le point M' de coordonnées $(x'; y')$ [$T(M) = M'$]. Montrer que ces coordonnées sont liées par les relations

$$\begin{cases} x' &= kx + y + 1, \\ y' &= x - ky - 1. \end{cases}$$

2. Démontrer que l'application T est bijective.
 3. Démontrer qu'en général il existe un point invariant, que l'on déterminera. Discuter suivant les valeurs de k .
 4. Déterminer l'application réciproque T^{-1} de T .

Partie C

Dans le plan complexe, soit $z' = x' + iy'$ l'affixe de M' et $z = x + iy$ l'affixe de M .

1. Démontrer que z' s'exprime en fonction de \bar{z} (conjugué de z) par

$$z' = (k + i)\bar{z} + 1 - i.$$

2. k étant non nul, par quelle transformation géométrique passe-t-on d'un point d'affixe z au point d'affixe z' ?

Partie D

On suppose maintenant $k = 0$; soit T_0 l'application correspondante.

1. Démontrer que T_0 est une isométrie involutive et qu'elle est une symétrie par rapport à une droite.
 2. Soit la parabole (P) d'équation $y = (x - 1)^2$.
 Déterminer l'équation de la courbe (P') transformée de (P) par T_0 . Quelle est la nature de (P')?
 3. (P) et (P') ont en commun deux points B et C; calculer l'aire de la partie du plan limitée par les deux arcs BC de (P) et de (P').