Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C septembre 1974 Amiens ∾

EXERCICE 1

Linéariser $\sin^5 x$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^5 x\,\mathrm{d}x$.

EXERCICE 2

1. Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $\dfrac{1-\mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,\theta}{1+\mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,\theta}$, θ étant un réel donné.
2. Dans un plan affine euclidien P rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ on considère l'application T qui, à tout point M d'affixe z, fait correspondre le point $M' = T(M)$ d'affixe $z' = \dfrac{1-\mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,\theta}{1+\mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,\theta}\overline{z}$.
Déterminer l'ensemble des points invariants de P par l'application T.
En déduire la nature de l'application T dont on précisera les éléments.

PROBLÈME

Partie A

Soit E un plan vectoriel et $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ une base de E. Tout endomorphisme φ de E a une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}$ dans la base $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$. (Voir note 1).

1. Quelles relations existe-t-il entre les réels a, b, c, d pour que φ soit un automorphisme involutif de E? Etudier les cas particuliers $a = 1$, $a = -1$.
Dans la suite du problème, on supposera que a n'est égal ni à 1, ni à -1.
2. On prend $b = 1 + a$. Déterminer c et d en fonction de a pour que $\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}$ soit la matrice d'un automorphisme involutif de E que l'on désignera par φ_a
Si S et t sont les endomorphismes de E de matrices respectives $\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ dans la base $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$, vérifier que $\varphi_a = S + at$. (Voir note 2).
3. λ étant un réel quelconque, on désigne par E_λ l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{u}$ de E tels que $\varphi_a\left(\overrightarrow{u}\right) = \lambda\overrightarrow{u}$, où a est un réel fixé différent de 1 et de -1.
Déterminer les valeurs λ_1 et λ_2 de λ pour lesquelles E_λ contient d'autres vecteurs $\overrightarrow{u}$ que le vecteur nul de E.
Montrer que E_{λ_1} et E_{λ_2} sont deux sous-espaces vectoriels de E dont on donnera une base et montrer qu'ils sont supplémentaires.
En déduire la nature de φ_a.
4. Déterminer la matrice de φ_a dans la base $\left(\overrightarrow{I},\ \overrightarrow{J}\right)$, telle que $\overrightarrow{I} = \overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{J} = (a-1)\overrightarrow{\imath} + (a+1)\overrightarrow{\jmath}$.

Partie B

On compose maintenant par la loi $\circ$ de composition des applications deux automorphismes involutifs φ_a et $\varphi_{a'}$.

1. Montrer que

$$g = \varphi_{a'} \circ \varphi_a = \text{Id}_{\text{E}} + (a - a')t$$

(Voir note 3).

2. Déterminer $g^2 = g \circ g$. g est-elle involutive ?
(On pourra simplifier les calculs en posant $\alpha = a - a'$).

3. En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que :

$$g^n = g \circ g^{n-1} = \text{Id}_{\text{E}} + n(a - a')t$$

n étant un entier naturel non nul.

Partie C

On se place maintenant dans le plan affine P associé au plan vectoriel E et rapporté au repère cartésien $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On considère l'application affine f_a associée à φ_a telle que l'image de l'origine soit K, K étant le point de P de coordonnées p et q.

1. Déterminer analytiquement l'application f_a dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

2. Déterminer, suivant les valeurs de p et q, l'ensemble des points invariants de f_a.

3. Montrer que $f \circ f$ est une transformation affine que l'on déterminera avec précision.

4. Quel est l'ensemble des points K pour que f_a soit une involution affine ? Quelle est, dans ce cas, la nature de f ?

Notes :
1 On appelle endomorphisme de E, toute application linéaire de E vers E.
2 a étant un réel et t étant un endomorphisme de E, on rappelle que at est l'endomorphisme de E qui à tout vecteur $\vec{v}$ de E associe le vecteur $a\left[t\left(\vec{v}\right)\right]$.
3 Id_{E} désigne l'application identique dans E.