Durée : 4 heures

Baccalauréat C Amiens septembre 1975

EXERCICE 1

On considère les nombres $A = 2n+3$ et $B = 5n-2$ où n est un entier naturel.

1. Trouver deux entiers naturels u et v, premiers entre eux, tels que $Au - Bv$ soit indépendant de n. En déduire que, si A et B ne sont pas premiers entre eux, leur p.g.c.d. est 19.
2. Étudier l'ensemble des entiers n tels que le p.g.c.d. de A et B soit égal à 19.

EXERCICE 2

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x + \text{Log}\,[1 + |1-x|]\,.$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la fonction f et la représenter graphiquement dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
On indiquera, avec précision, les tangentes ou demi-tangentes aux points remarquables de la courbe.
3. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}. Représenter f^{-1} dans le repère du 2.
4. Calculer $I = \displaystyle\int_0^2 [x - f(x)]\,\mathrm{d}x$.
Interpréter cette valeur de I.

PROBLÈME

Partie A

Soit E un plan vectoriel euclidien, muni d'une base orthonormée $\left(\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ notée aussi $\mathscr{B}$.

1. On considère l'endomorphisme F de E ayant pour matrice dans la base : $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. Pour tout couple $\left(\vec{v},\,\vec{v'}\right)$ de E^2, comparer les produits scalaires $F\left(\vec{v}\right)\cdot F\left(\vec{v}\right)$ et $\vec{v}\cdot\vec{v}$; en deduire que F ne conserve pas le produit scalaire mais « conserve » l'orthogonalité et « multiplie » la norme de tout vecteur par $\sqrt{2}$.
Montrer que F est la composée d'une homothétie de rapport $\sqrt{2}$ et d'une symétrie vectorielle orthogonale s par rapport à une droite vectorielle Δ, que l'on déterminera avec précision. Évaluer les applications F_n pour $n \in \mathbb{N}^\star$.
2. On considère également l'endomorphisme G de E ayant pour matrice dans la base $\mathscr{B}$: $\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$.
Comparer également les produits scalaires $G(\vec{v})\cdot G(\vec{v})$ et $\vec{v}\cdot\vec{v}$. Que peut-on conclure pour G?
Montrer que G est la composée d'une homothétie vectorielle de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et d'une rotation r dont on déterminera l'angle.
Préciser G^n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

3. Déterminer la matrice et la nature des endomorphismes de E, s' et s'' tels que : $r = s \circ s' = s'' \circ s$; préciser $F \circ G$ et $G \circ F$.

Partie B

Soit un plan affine euclidien $\mathscr{E}$ associé à E et muni d'un repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, $\left(\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ étant la base orthonormée définie en A.
On appelle f et g les applications affines de $\mathscr{E}$ vers $\mathscr{E}$ associées respectivement à F et G et laissant le point $\Omega(1\,;\,1)$ invariant. À chaque point $M(x\,;\,y)$ de $\mathscr{E}$ on associe son affixe $z = x + \text{i}y$.

1. Montrer que l'affixe z_1 de M_1, si $M_1 = f(M)$, est égale à $(1-\text{i})\left(1-\overline{z}\right)$.
Quelle est la nature géométrique de f ?
Soit A le point d'affixe 1. Soit les points $A_0 = \text{A}$, A_1, A_2, $\cdots$, A_n tels que
$A_n = f\left(A_{n-1}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$.
Montrer que tous les points A_n appartiennent à l'union de deux demi-droites d'origine Ω.

2. Montrer que l'affixe z'_1 de M'_1 si $M'_1 = g(M)$, est égale à $\dfrac{1-\text{i}}{2}z + \text{i}$.
Quelle est la nature géométrique de g ?
Soit les points $A'_0 = \text{A}$, A'_1, A'_2, $\ldots$, A'_n tels que $A'_n = g\left(A'_{n-1}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$.
Montrer que si l'on pose : $u_n = a'_n - a'_{n-1}$ et $v_n = |u_n|$, a'_n désignant l'affixe de A'_n, les suites :

$$u : \begin{array}{lll} \mathbb{N}^\star & \to \mathbb{R} & \\ n & \longmapsto & u_n \end{array} \qquad \text{et} \qquad v : \begin{array}{lll} \mathbb{N}^\star & \to \mathbb{R} & \\ n & \longmapsto & v_n \end{array}$$

sont des suites géométriques.
Calculer la somme S_n des n premiers termes de la. suite v. Montrer que S_n admet une limite, que l'on calculera, quand n tend vers $+\infty$.

Partie C

1. Construire dans le repère précédent $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ la courbe (C) d'équation

$$y = \frac{x}{x-1}.$$

Déterminer les valeurs de α ($\alpha < 1$) pour que l'aire arithmétique du domaine limité par (C) et les droites d'équations : $y = 1$, $x = -1$ et $x = 0$ soit égale à 2 Log 2.

2. (C_1) désignant la transformée de (C) par f, donner une équation de (C_1) dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ puis dans le repère $\left(\Omega,\,\vec{\imath},\,\vec{\imath}\right)$. Construire (C_1).

3. Déterminer la nature géométrique de $g \circ f$. Quelle est la transformée de la courbe (C) par $g \circ f$? Expliquer le résultat obtenu.