∽ Baccalauréat C Amiens septembre 1978 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

1. Déterminer les restes de la division par 13 des différentes puissances de 3 à exposants entiers naturels.
2. Déterminer les entiers naturels n tels que $A_n = 3^n + 3^{2n} + 3^{3n}$ soit divisible par 13.
3. Les nombres suivants étant écrits dans le système de numération à base trois : 1110, 1010100, 1001001000, on demande s'ils sont divisibles par treize.

EXERCICE 2 **4 points**

$\mathscr{P}$ est le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé direct $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
On associe à chaque nombre complexe $z = x + \text{i}\,y$ son image M de coordonnées $(x~;~y)$ dans ce repère.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - 2(11+3\text{i})z + 16(7+\text{i}) = 0.$$

2. On appelle M_1 et M_2 les images des solutions de cette équation. Déterminer toutes les similitudes directes de centre O qui transforment M_1 en M_2 ou bien M_2 en M_1. Préciser les éléments géométriques qui les caractérisent.

PROBLÈME **12 points**

Dans tout le problème, C et S désignent les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$C : x \longmapsto \frac{\text{e}^x + \text{e}^{-x}}{2}, \quad S : x \longmapsto \frac{\text{e}^x - \text{e}^{-x}}{2}$$

Partie A

1. Étudier les fonctions C et S. On appelle Γ (respectivement $\sum$) la courbe représentative de C (respectivement S). Construire Γ et $\sum$ sur une même figure.
2. **a.** Justifier sans calcul le fait que S admet une fonction réciproque S^{-1} définie sur $\mathbb{R}$. S^{-1} est-elle continue et dérivable ?

   b. Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S(x) = \frac{\text{e}^{2x} - 1}{2\text{e}^x}$$

   c. Déterminer l'expression de $S^{-1}(y)$ en fonction de y. (On pourra utiliser la formule du b. et poser $X = \text{e}^x$).
3. Soit m un paramètre réel.

   a. Démontrer que Γ admet une tangente au point d'abscisse m. Même question pour $\sum$. Calculer les coordonnées du point T_m d'intersection de ces tangentes, s'il existe.

   b. Quel est l'ensemble des points T_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$? Le construire.

Partie B

E est un espace vectoriel euclidien de dimension 2 rapporté à la base orthonormée $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. À tout nombre réel t on associe l'endomorphisme φ_t de E dont la matrice dans la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est :

$$A(t) = \begin{pmatrix} C(t) & S(t) \\ S(t) & C(t) \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier les égalités suivantes :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall t' \in R, \quad \begin{array}{lcl} C(t)^2 - S(t)^2 & = & 1 \\ C(t)C(t') + S(t)S(t') & = & C(t+t') \\ S(t)C(t') + S(t')C(t) & = & S(t+t'). \end{array}$$

2. Soit Φ l'ensemble des endomorphismes φ_t. Montrer que Φ est un groupe pour la loi de composition des applications notée $\circ$ et que l'application

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \Phi \\ t & \longmapsto & \varphi_t \end{array}$$

est un isomorphisme du groupe $(\mathbb{R},\ +)$ sur le groupe $(\Phi,\ \circ)$.

3. Si $t \neq 0$, on considère, pour chaque valeur du paramètre réel λ le sous-ensemble E_λ défini par :

$$\vec{u} \in E_\lambda \quad \text{si et seulement si} \quad \varphi_t\left(\vec{u}\right) = \lambda \vec{u}.$$

a. Démontrer que $E_\lambda = \left\{\vec{0}\right\}$, sauf pour deux valeurs λ_1 et λ_2 que l'on exprimera en fonction de t. (On choisira $\lambda_1 < \lambda_2$).

b. Montrer que E_{λ_1} et E_{λ_2} sont deux droites vectorielles indépendantes de t dont on précisera des vecteurs directeurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.

c. Montrer que $\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right)$ est une base de E et écrire la matrice de φ_t dans cette nouvelle base.

Partie C

$\mathcal{E}$ est l'espace affine euclidien associé à E. Soit f_t l'application définie par :

$$f_t: \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & & \mathcal{E} \\ M & \longmapsto & M' \end{array} \quad \text{tel que } \overrightarrow{\text{O}M'} = \varphi_t\left(\overrightarrow{\text{O}M}\right).$$

1. Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur $\mathcal{E}$ par :

$$M\mathcal{R}M' \quad \text{si et seulement si il existe} \quad t \in \mathbb{R} \text{ tel que } M' = f_t(M).$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Soit P_0 le point de coordonnées $(4\,;5)$ dans la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ et H la classe d'équivalence de P_0.

a. Quelles sont les coordonnées x et y d'un point P de H ?

b. Vérifier que $y > 0$.

c. En utilisant l'égalité $C(t)^2 - S(t)^2 = 1$, montrer que H est une branche d'hyperbole équilatère que l'on construira.