∽ Baccalauréat C Amiens septembre 1980 ∾

EXERCICE 1

On considère trois entiers naturels non nuls a, b, c. Le plus grand commun diviseur de a et b est δ ; celui de b et c est δ'.
Quel est le plus grand commun diviseur de a, b, c ?
Sachant que $\delta = 12$, $\delta' = 18$ et que $a + b + c = 102$, déterminer toutes les valeurs possibles des trois nombres a, b, c.

EXERCICE 2

On considère l'équation du second degré dans $\mathbb{C}$

$$\left(m^2+1\right)z^2 + [1-(2+\mathrm{i})m]z + 1 + \mathrm{i} = 0,$$

où m est un paramètre réel.
On note z_1 et z_2 ses racines complexes avec $|z_1| < |z_2|$.

1. **a.** Vérifier que $\dfrac{1}{m+\mathrm{i}}$ est l'une des racines. Déterminer l'autre.
   b. Montrer qu'il existe un couple unique $(a ; b) \in \mathbb{C}^\star \times \mathbb{C}$, indépendant de m tel que :
   $z_2 = a\overline{z_1} + b$, $\overline{z_1}$ désignant le nombre complexe conjugué de z_1.
2. Soit M_1 et M_2 les points du plan complexe d'affixes respectives z_1 et z_2.
   a. Déduire de ce qui précède que M_2 est l'image de M_1 par une similitude indirecte unique dont on précisera les éléments.
   b. Montrer que l'ensemble des points M_1 d'affixe z_1, m décrivant $\mathbb{R}$, est le cercle (Γ) d'équation $x^2 + y^2 + y = 0$ privé de l'un de ses points et préciser ce point.
   Déterminer, par ses coordonnées, le centre de ce cercle. En déduire l'ensemble des points M_2 d'affixe z_2 quand m varie.

PROBLÈME

Partie A

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \frac{\mathrm{Log}\,x}{\sqrt{x}}$$

où Log x désigne le logarithme népérien de x.

1. Étudier les limites de f aux bornes de son intervalle de définition.
   Étudier les variations de f et tracer la représentation graphique (C) de f dans un plan rapporté au repère orthogonal $\left(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ où $\left\|\vec{\imath}\right\| = 5$ mm et $\left\|\vec{\jmath}\right\| = 25$ mm.
2. Pour tout a élément de $\mathbb{R}_+^\star$, calculer l'intégrale

$$F(a) = \int_1^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Déterminer $\displaystyle\lim_{\substack{a\to 0\\a>0}} F(a)$ et donner une interprétation géométrique du résultat.

Partie B

On considère dans cette partie les fonctions numériques f et g de la variable réelle x définies respectivement par

$$f(x) = \frac{\text{Log}\, x}{\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

On note $\mathscr{F}$ l'espace vectoriel réel des applications de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$ et on désigne par E le sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$ engendré par la famille $(f,\ g)$.

1. Montrer que $(f,\ g)$ est une base de E.
2. Pour tout u élément de E et pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^\star$, on définit u_1 par : $u_1(x) = x \cdot u'(x)$.
   Vérifier que u_1 appartient à E et montrer que l'application φ_1 de E dans E définie, pour u élément de E, par $\varphi_1(u) = u_1$ est un endomorphisme de E.
   Vérifier que, dans la base $(f,\ g)$, la matrice de φ_1 est
   $$M_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
3. Id_E désignant l'identité de E, déterminer l'unique réel λ pour lequel $\varphi_1 + \lambda\text{Id}_\text{E}$ n'est pas bijectif.
   Calculer ensuite
   $$\left(\varphi_1 + \lambda\text{Id}_\text{E}\right)^2 = \left(\varphi_1 + \lambda\text{Id}_\text{E}\right) \circ \left(\varphi_1 + \lambda\text{Id}_\text{E}\right)$$
   pour la valeur λ_0 de λ ainsi obtenue.
4. Pour tout u appartenant à E, on note $\varphi_1^2(u) = \varphi_1\left(u_1\right) = v_1$.
   Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}_+^\star$, calculer $v_1(x)$ et montrer, après développement de $\left(\varphi_1 + \lambda\text{Id}_\text{E}\right)^2$, que tout élément u de E vérifie, pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^\star$
   $$x^2 u''(x) + 2xu'(x) + \frac{1}{4}u(x) = 0.$$

Partie C

E étant un espace vectoriel réel euclidien et $(f,\ g)$ une base orthonormée de E, on définit, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, les applications u_2 et u_3 par

$$u_2(x) = \frac{1}{x}u\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad u_3(x) = \frac{\text{Log}\, x}{2}\left(u(x) + u_2(x)\right)$$

1. Vérifier que u_2 et u_3 sont des éléments de E et que les applications φ_2 et φ_3 de E dans E, définies, pour tout u élément de E, par
   $$\varphi_2(u) = \frac{1}{x}u\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad \varphi_3(u) = \frac{\text{Log}\, x}{2}\left(u(x) + u_2(x)\right)$$
   sont des endomorphismes de E.
   Donner les matrices M_2 et M_3 respectives de φ_2 et φ_3 dans la base $(f\ ;\ g)$.
2. Quelle est la nature géométrique de φ_2 ?
3. Soit $\Phi = a\varphi_1 + b\varphi_2 + c\varphi_3$ avec $(a\ ;\ b\ ;\ c) \in \mathbb{R}^3$?
   a. Pour quelles valeurs de $(a\ ;\ b\ ;\ c)$, Φ est-elle une rotation vectorielle ?
   Dans chacun des cas obtenus, indiquer la matrice de Φ et les éléments caractéristiques de la rotation Φ.

b. Pour quelles valeurs de $(a\,;\ b\,;\ c)$, Φ est-elle une symétrie vectorielle ?

Parmi celles-ci existe-t-il des symétries vectorielles orthogonales ? Éventuellement les préciser.

c. En rappelant qu'un projecteur p est caractérisé par $p^2 = p$, pour quelles valeurs de $(a\,;\ b\,;\ c)$, Φ est-elle une projection ?

N.B. - Pour les questions b. et c. ci-dessus, on ne précisera pas les éléments caractéristiques des endomorphismes Φ.