∽ Baccalauréat C Amiens septembre 1973 ∾

EXERCICE 1

Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur l'intervalle $I = [0~;~\pi]$ par

$$f(x) = \cos^3 x - 3\cos x + 2.$$

1. Montrer que f est une bijection de l'intervalle I sur un intervalle J que l'on déterminera.
2. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de f par rapport à un repère orthonormé.
   Montrer que $(\mathscr{C})$ admet un centre de symétrie.
3. Calculer l'aire de la portion du plan comprise entre $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \pi$.
   Pour évaluer $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^3 x\,\mathrm{d}x$ on pourra effectuer une intégration par parties et en déduire une relation entre $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^3 x\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x$.

EXERCICE 2

Soit P un plan affine associé au plan vectoriel V et $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ un repère cartésien de P.
On considère l'application f de P dans P qui, à tout point M de P de coordonnées $(x~;~y)$, associe le point M' de P dont les coordonnées $\left(x'~;~y'\right)$, sont déterminées par

$$\left\{\begin{array}{l c r}x' &=& 2x - 5y + 3,\\ y' &=& -4x + 10y - 1.\end{array}\right.$$

1. Montrer que f est une application affine. On définira par sa matrice dans la base $\left(\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ de V l'endomorphisme φ de V associé à f.
2. Déterminer l'ensemble des points invariants de P par f.
3. Montrer que le noyau et l'image de l'endomorphisme φ sont deux-sous espaces vectoriels supplémentaires de V que l'on déterminera chacun par une base.

PROBLÈME

Partie A

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^3 = 1$.
   Indiquer le forme trigonométrique des solutions.
   Soit j celle des solutions qui a pour module 1 et pour argument $\dfrac{2\pi}{3}$.
   Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.
2. On considère $\mathbb{C}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de base $(1~;~\mathrm{i})$.
   Montrer que $(1~;~j)$ est aussi une base de $\mathbb{C}$.
3. Soit $z = a + bj$ le nombre complexe de coordonnées a et b dans la base $(1~;~j)$.
   En utilisant l'expression de j en fonction de $\vec{\imath}$, écrire z sous la forme $x + y\vec{\imath}$; en déduire les coordonnées x et y de z dans la base $(1~;~\mathrm{i})$ en fonction de a et b, puis calculer a et b en fonction de x et y.

4. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}$ défini par

$$f(1) = 1 \quad \text{et} \quad f(\mathrm{i}) = j.$$

Démontrer que f est un automorphisme de $\mathbb{C}$.
Déterminer le nombre complexe z tel que $f(z) = \mathrm{i}$.
Soit f^{-1} l'application réciproque de f. Écrire la matrice de f^{-1} relativement à la base $(1\,;\,\mathrm{i})$.

Partie B

Soit a et b les coordonnées d'un nombre complexe z, a' et b' celles d'un nombre complexe z' dans la base $(1\,;\,j)$.

1. Calculer en fonction de a et b le carré du module de z.

2. Déterminer dans la base $(1\,;\,j)$ les coordonnées :

a. du conjugué $\overline{z}$ de z,

b. de l'inverse $\dfrac{1}{z}$ de z supposé non nul,

c. des produits $j \cdot z$ et $j^2 \cdot z$,

d. du produit $z \cdot z'$.

Partie C

1. Soit E l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}$ où a et b sont des réels.

Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{M}_2 2$ sur $\mathbb{R}$ des matrices carrées d'ordre 2.
Déterminer une base de E.

2. Soit g l'application de $\mathbb{C}$ dans E qui, à tout nombre complexe $z = a + bj$, associe la matrice

$$g(z) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}.$$

a. $\mathbb{C}$ étant considéré comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, ainsi que E, démontrer que l'application g est linéaire.
Réalise-t-elle un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathbb{C}$ et E ?

b. Montrer que, pour tout couple $(z\,;\,z')$ de $\mathbb{C}^2$,

$$g(z \cdot z') = g(z) \times g(z').$$

c. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que le déterminant de la matrice $g(z)$ soit nul.

d. Calculer la matrice $g(1)$ et déterminer l'ensemble des nombres complexes z vérifiant l'égalité

$$[g(z)]^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$