Durée : 4 heures

Baccalauréat C septembre 1981 Amiens

EXERCICE 1

On se propose de résoudre, dans l'ensemble N, l'équation

$$x^2 - x - 136 = 5s(x),$$

où $s(x)$ représente la somme des chiffres de x exprimée dans le système décimal.

1. Montrer qu'il n'y a pas de solution à un chiffre.
2. Déterminer les solutions à deux chiffres dont le chiffre des dizaines est 1.
3. **a.** x désignant un entier naturel à deux chiffres dont le chiffre des dizaines est différent de 1, déterminer un encadrement de x. En déduire un encadrement de $x^2 - x - 136$.

   b. Majorer $s(x)$ et montrer qu'il n'y a pas de solution à deux chiffres dont le chiffre des dizaines est différent de 1.
4. Par une méthode analogue au 3., montrer qu'il n'y a pas de solution à n chiffres pour $n \geqslant 3$.

EXERCICE 2

Soit f l'application de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{lll} x & \longmapsto & x^2 \ln x \quad \text{pour } x > 0 \\ 0 & \longmapsto & 0. \end{array}\right.$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$. f est-elle dérivable en 0 ?
2. Étudier f et tracer sa représentation graphique (C) dans le plan muni du repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$(unité : 6 cm).
3. On désigne par α un nombre réel strictement positif; calculer l'intégrale définie par :

$$A(\alpha) = \int_1^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

En déduire l'aire en cm^2, du domaine (D) du plan défini par :

$$(D) = \{M(x\,;\,y), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad f(x) \leqslant y \leqslant 0\}.$$

PROBLÈME

Soit E un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Pour tout réel λ on définit l'application affine, f_λ qui à tout point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ de E associe le point $M_1\left(x_1\,;\,y_1\,;\,z_1\right)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{l} x_\lambda = (1-\lambda)x + 3\lambda z + 2\lambda \\ y_\lambda = (1-\lambda)y + 2\lambda z + \lambda \\ z_\lambda = z. \end{array}\right.$$

Partie A

1. Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles f_λ est bijective.
2. Montrer que, pour λ non nul, f_λ admet un ensemble, D de points invariants que l'on caractérisera. Quelle est la nature de f_0 ?
3. Montrer que f_1 est une projection affine que l'on déterminera par ses éléments caractéristiques.
4. Démontrer que, pour tout λ réel et pour tout M de E, le vecteur $\overrightarrow{MM_\lambda}$ appartient à un plan vectoriel $\mathscr{P}$ dont on donnera une base.
   Comparer $\overrightarrow{M_1M}$ et $\overrightarrow{MM_\lambda}$; en déduire une construction de M_λ.
5. On désigne par $\mathscr{F}$ l'ensemble des applications f_λ bijectives.
   Montrer que $\mathscr{F}$ est un groupe commutatif pour la loi $\circ$ de composition des applications.

Partie B

On désigne par P le plan affine de repère $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Montrer que $f_\lambda(\text{P}) \subset \text{P}$, pour tout λ réel. En déduire que, pour $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$, la restriction de f_λ au plan P est une homothétie de centre A$(2\,;\,1)$ dont on déterminera le rapport.
2. Dans P, on considère la courbe C d'équation

$$x^2+4y^2-2x-8y+4=0.$$

   Montrer que C est une conique dont on déterminera les sommets et le centre.
3. Pour tout k réel non nul, on note C_k l'image de C par l'homothétie, H de centre A et de rapport k.
   Déterminer une équation cartésienne de C_k et en déduire sa nature.
4. Montrer qu'il existe une valeur k_0, et une seule, de k pour laquelle C_k passe par O ; en déduire que C_k a pour équation,

$$x^2+4y^2-8y=0.$$

   Représenter C et C_k sur un même graphique.

Partie C

Dans le plan P, on considère le point mobile M, dont les coordonnées à tout instant t supérieur ou égal à zéro, sont données dans le repère $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) &=& 2\cos[\pi \text{Log}\,(t+1)]\\ y(l) &=& 1+\sin[\pi\text{Log}\,(t+1)].\end{array}\right.$$

1. **a.** Montrer que la trajectoire du mobile M est la courbe C_{k_0} du B 4, et qu'à l'instant $t_0=0$ le mobile est en A.
   b. Calculer les coordonnées du vecteur-vitesse, $\overrightarrow{V(t)}$, et du vecteur-accélérateur, $\overrightarrow{\Gamma(t)}$, du mobile M à l'instant t.
2. On désigne par t_1 la date du premier passage du mobile M en A, par t_2, la date de son deuxième passage en A et, d'une manière générale, par t_n la date de son n-ième passage en A. Calculer t_n en fonction de l'entier naturel n.
   En déduire $\overrightarrow{V_n} = \overrightarrow{V\,(t_n)}$ et $\overrightarrow{\Gamma_n} = \overrightarrow{\Gamma\,(t_n)}$.

3. On considère les suites (a_n), (b_n), (c_n) et (d_n), définies pour tout n, entier naturel, par

$$a_n = \overrightarrow{V_n} \cdot \overrightarrow{\imath}\ ,\ b_n = \overrightarrow{V_n} \cdot \overrightarrow{\jmath}\ ,\ c_n = \overrightarrow{\Gamma_n} \cdot \overrightarrow{\imath}\ ,\ d_n = \overrightarrow{\Gamma_n} \cdot \overrightarrow{\jmath}\ .$$

   Montrer que ce sont quatre suites géométriques dont on donnera les éléments caractéristiques.
   En déduire

$$\lim_{n\to+\infty} \overrightarrow{V_n} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \overrightarrow{\Gamma_n}.$$

4. Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle le temps mis par le mobile entre le n-ième et le $(n+1)$-ième passages en A est supérieur à 100.

N. B. - La partie C est indépendante des parties A et B.