Durée : 4 heures

Baccalauréat C septembre 1982 Amiens

PROBLÈME **14 points**

1. Soit $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel des applications numériques définies sur $\mathbb{R}$, et indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.
   On donne les quatre éléments de $\mathcal{F}$, définis pour tout x de $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = x\mathrm{e}^{x} \quad ; \quad f_2(x) = \mathrm{e}^{x} \quad ; \quad f_3(x) = x\mathrm{e}^{-x} \quad ; \quad f_4(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

   On appelle $\mathcal{E}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$, engendré par la famille $\left(f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4\right)$.

   a. Soit f, l'élément de $\mathcal{E}$, égal à $af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4$ avec $(a,\ b,\ c,\ d) \in \mathbb{R}^4$.
   Montrer que la dérivée d'ordre n, de f, qu'on note $f^{(n)}$, est définie par

$$f^{(n)}(x) = [a(x+n)+b]\mathrm{e}^{x} + (-1)^n[c(x-n)+d]\mathrm{e}^{-x}.$$

   (Il est conseillé d'utiliser ce résultat dans la suite du problème.)

   b. Montrer que $\mathcal{E}$ est de dimension 4. (On pourra utiliser le fait que, si $af_1 + bf_2 + Cf_3 + df_4$ est l'application nulle 0, ses trois premières dérivées sont nulles).

2. **a.** Étudier les variations de l'application f, définie sur $\mathbb{R}$, par

$$f(x) = (4x-6)\mathrm{e}^{x} + (2x+1)\mathrm{e}^{-x} - x^2 + x - 5.$$

   (Pour l'étude des branches infinies de la courbe représentative (C) on fera seulement une étude précise des limites de f en $+\infty$, et en $-\infty$.)
   Donner une allure de la courbe (C), dans un plan (P) rapporté à un repère orthonormé.

   b. Évaluer l'aire géométrique de la portion de (P) comprise entre la courbe (C) et les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.
   On recherchera une primitive de f en utilisant le **2. a.**).

3. On appelle G, l'application de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ définie par :

$$G(f) = f'' - 2f' + f.$$

   Montrer que G est un endomorphisme de $\mathcal{F}$.
   Soit h un élément tel que $G(h) = 0$, et g l'élément de $\mathcal{F}$ défini par $g(x) = \mathrm{e}^{-x} \cdot h(x)$.
   Évaluer la dérivée seconde de g, en déduire que g est une application affine, puis que $\{f \in \mathcal{F} ; G(f) = 0\}$ est le plan vectoriel de base $\left(f_1,\ f_2\right)$.

4. On appelle G_1 la restriction de $\mathcal{G}$ à l'ensemble de départ $\mathcal{E}$.

   a. Montrer que G_1 est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

   b. Déterminer $\{f \in \mathcal{E} ; G_1(f) = 0\}$ et $\{g \in E ; g = G_1(f),\ f \in \mathcal{E}$.

   c. Soit l'application $f_5 = 8f_3 - 4f_4$.
   Trouver un élément f_0 du plan engendré par f_3 et f_4 tel que $\mathcal{G}_1\left(f_0\right) = f_5$.

   d. Trouver une application polynôme, p_0, du second degré, telle que, $G\left(p_0\right) = p$, p étant l'application polynôme définie par $p(x) = x^2 + 5x - 9$.

   e. Prouver que l'ensemble $S = \{f \in \mathcal{F} / G(f) = f_5 + p\}$ est non vide et le déterminer.

   f. Déterminer l'élément f de S, tel que $f(0) = -10$ et $f'(0) = 0$.