

☞ Baccalauréat C Amiens Rouen juin 1986 ☞

EXERCICE 1

4 POINTS

Dans le plan complexe, on considère les points : A d'affixe $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, B d'affixe $2i$.

M est le point d'affixe z , $z \neq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

$$\text{Soit } z' = \frac{z - 2i}{2z - 1 - i}.$$

1. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que z' soit réel.
2. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que z' soit imaginaire pur.
3. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que qu'un argument de z' soit égal à $\frac{3\pi}{2}$.

EXERCICE 2

4 POINTS

Soit un triangle isocèle (OAB) ($OA = OB$) et un point P variable du segment [AB], $P \neq A$ et $P \neq B$.

La parallèle menée de P à la droite (OB) coupe la droite (OA) en A' et la parallèle menée de P à la droite (OA) coupe la droite (OB) en B' .

1. Démontrer que $OA' = BB'$.
2. En déduire qu'il existe une rotation r telle que $r(O) = B$ et $r(A') = B'$ dont on déterminera l'angle en fonction de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.
Démontrer que $r(A) = O$. Déterminer alors le centre Ω de cette rotation.
3. Démontrer que les quatre points O, A' , B' et Ω sont cocycliques.

PROBLÈME

12 POINTS

Le but du problème est :

- A. L'étude de la fonction g .
- B. La détermination d'un encadrement de g .
- C. L'évaluation d'une aire et de l'erreur commise.

On considère la fonction numérique g définie sur $[0; 1]$ par

$$\begin{cases} g(t) = (1 - e^{-t}) \ln t & \text{pour } 0 < t \leq 1 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

(\ln désigne le logarithme népérien.)

A.

1. Démontrer que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-t}}{t} = 1$.

2. Démontrer que g est continue sur $[0; 1]$. Étudier la dérivabilité de g sur $[0; 1]$ et démontrer pour tout réel t de $]0; 1[$ $g'(t) = \frac{e^{-t}}{t} (t \ln t + e^t - 1)$.

3. Soit la fonction numérique f définie sur $]0; 1[$ par

$$f(t) = t \ln t + e^t - 1.$$

Étudier le sens de variation et les valeurs aux bornes de f' . Montrer que f' s'annule une seule fois sur $]0; 1[$ un point t_0 (on ne calculera pas t_0).

En déduire le signe de f' et le sens de variation de f sur $]0; 1[$.

En déduire que f ne s'annule qu'une seule fois sur $]0; 1[$ pour une valeur t_1 (on ne calculera pas t_1).

4. Terminer l'étude de la fonction g . Tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité = 6 cm). On tracera la tangente à la courbe au point d'abscisse 0. On admettra que $t_1 \approx 0,3$.

B.

Soit n un entier naturel. On définit sur $[0; 1]$ la fonction numérique φ_n par

$$\varphi_0(t) = 1 \quad ; \quad \varphi_1(t) = 1 - t \quad ; \quad \varphi_2(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2!}$$

et pour tout $n > 2$,

$$\varphi_n(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{t^n}{n!}.$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel non nul et pour tout réel t de $[0; 1]$ $\varphi'_n(t) = -\varphi_{n-1}(t)$.
2. On se propose de démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et pour tout réel t de $[0; 1]$: $\varphi_{2n+1}(t) \leq e^{-t} \leq \varphi_{2n}(t)$
 - a. Soit Φ et Ψ deux fonctions numériques définies sur $[0; 1]$, dérivables sur $]0; 1[$ telles que $\Phi(0) = \Psi(0)$.
Démontrer que si pour tout réel t de $]0; 1[$: $\Phi'(t) \leq \Psi'(t)$ alors pour tout réel t de $[0; 1]$, $\Phi(t) \leq \Psi(t)$.
 - b. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n et pour tout réel t de $[0; 1]$: $\varphi_{2n+1}(t) \leq e^{-t} \leq \varphi_{2n}(t)$.
3. Pour tout entier naturel n , déduire de la question précédente un encadrement de la fonction g sur $]0; 1[$ faisant intervenir les fonctions φ_{2n} et φ_{2n+1} .

C.

On considère l'ensemble Δ des points M du plan de coordonnées $(t; y)$ dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ vérifiant $0 \leq t \leq 1$ et $g(t) \leq y \leq 0$.

On se propose de déterminer une valeur approchée de l'aire de Δ .

1. Soit n un élément de \mathbb{N} et α un réel tel que $0 < \alpha \leq 1$.

On pose

$$I_n(\alpha) = \int_{\alpha}^1 t^n \ln t \, dt.$$

Calculer $I_n(\alpha)$ en utilisant une intégration par parties. Déterminer la limite de $I_n(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 par valeurs positives.

2. En utilisant le B. 3., donner un encadrement de $\int_{\alpha}^1 g(t) \, dt$ au moyen des intégrales du type $I_n(\alpha)$.

En déduire un encadrement de $\int_0^1 g(t) \, dt$.

3. Donner en cm^2 une valeur approchée par excès de l'aire Δ à 10^{-2} près.