∽ Baccalauréat C Amiens - Rouen juin 1987 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

1. Déterminer le module et un argument du nombre complexe :

$$u = \frac{\sqrt{3}+\text{i}}{4}.$$

2. Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans lui-même qui à tout nombre complexe z associe :

$$f(z) = uz + (1+\text{i})(1-u).$$

Montrer que f est bijective, et déterminer le complexe w tel que $f(w) = w$.

3. Soit I, M et M' les points du plan complexe ayant pour affixe w, z et $f(z)$ respectivement. On suppose M différent de I.

Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{IM},\ \overrightarrow{IM'}\right)$, et calculer la distance IM' en fonction de la distance IM.

Onnote F l'application qui à M associe M'.

Préciser la nature de F et ses éléments caractéristiques.

4. Soit A_0 le point d'affixe $z_0 = -1+2\text{i}$.

On définit, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = f(z_n)$.

On note A_n le point d'affixe z_n dans le plan complexe.

Calculer, en fonction de n, la distance IA_n.

Quelle est la limite de cette distance quand n tend vers $+\infty$?

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan, F un point dont la distance à $\mathcal{D}$ est égale à 2,25 (unité : 1cm) et Δ la droite passant par F et perpendiculaire à $\mathcal{D}$.

1. Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que $\dfrac{M\text{F}}{MH} = 0,8$, H étant la projection orthogonale de M sur $\mathcal{D}$.

Donner la nature de (E). Préciser les directrices, les foyers et les sommets A et A′ situés sur $\mathcal{D}$. Représenter (E) sur un dessin.

2. Déterminer l'équation cartésienne de (E) dans un repère orthonormal formé par Δ et la médiatrice de [AA′].

PROBLÈME **12 POINTS**

L'objectif de ce problème est d'étudier certaines fonctions du type $x \longmapsto x^{\alpha}\mathrm{e}^{-x}$, α étant un réel strictement positif.

A.

On désigne par g_1 et g_2 les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$g_1(x) = x\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad g_2(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Étudier les fonctions g_1 et g_2 : on donnera le sens de variation et les limites en $-\infty$ et $+\infty$.

   Dessiner leurs courbes représentatives (C_1) et (C_2) dans le même repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité : 2 cm) ; on prendra soin de préciser leur position.
2. Déterminer une équation de la tangente à (C_1) au point M d'abscisse x ; cette tangente coupe l'axe des ordonnées $y'y$ en un point T.

   Déterminer, en fonction de x, l'ordonnée de T.
3. Soit t un réel donné, et T le point de $y'y$ tel que $\mathrm{O}T = t$. Utiliser la courbe (C_2) pour étudier, suivant la valeur de t, le nombre de tangentes à (C_1) passant par T.

   En déduire une construction géométrique de la tangente en M à (C_1).

B. n étant un entier naturel non nul, f_n est la fonction de $[0\,;\,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$, définie par

$$f_n(x) = x^n\mathrm{e}^{-x},$$

de courbe représentative $(\mathscr{C}_n)$ dans un repère orthogonal.

On désigne par S_n l'aire de la portion de plan délimitée par $(\mathscr{C}_n)$, l'axe des abscisses et la droite d'équation : $x = 1$.

1. En remarquant que, pour x positif, on a $\mathrm{e}^{-x} \leqslant 1$, montrer que $S_n < \dfrac{1}{n}$.

   En déduire la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.
2. Établir une relation entre S_{n+1} et S_n.

   En déduire que $\dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{n+1}$ est une valeur approchée de S_n à $\dfrac{1}{(n+1)^2}$ près.

C. On note f la fonction définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(x) & = & x^{\frac{1}{3}}\cdot\mathrm{e}^{-x},\ \text{si } x > 0\\ f(0) & = & 0.\end{array}\right.$$

On appelle u la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{3}$ et $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$ pour tout entier naturel n.

On admet qu'il existe m strictement positif tel que

$$|f'(x)| < m < 1 \quad \text{pour tout } x \text{ de } \left[\frac{1}{3}\,;\,1\right].$$

1. **a.** Montrer que l'image par f de tout élément x de $\left[\dfrac{1}{3}\,;\,1\right]$ est aussi dans $\left[\dfrac{1}{3}\,;\,1\right]$.

b. On pose $h(x) = f(x) - x$. Montrer que h s'annule en un point λ unique de $\left]\dfrac{1}{3}\ ;\ 1\right]$.

c. Rappeler l'inégalité des accroissements finis, et montrer qu'on peut l'appliquer à deux points a et b quelconques de $\left[\dfrac{1}{3}\ ;\ 1\right]$.

2. **a.** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $\left[\dfrac{1}{3}\ ;\ 1\right]$.

b. Montrer que, si u converge, sa limite est λ.

c. Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$|u_{n+1} - \lambda| \leqslant m|u_n - \lambda|;$$

en déduire que : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = \lambda$.