# Baccalauréat C Amiens Rouen juin 1986

**EXERCICE 1** **4 POINTS**

Dans le plan complexe, on considère les points : A d'affixe $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\text{i}$ , B d'affixe 2i.

$M$ est le point d'affixe $z$, $z \neq \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\text{i}$.

$$\text{Soit}\quad z' = \frac{z-2\text{i}}{2z-1-\text{i}}.$$

1. Déterminer et construire l'ensemble des points $M$ tels que $z'$ soit réel.
2. Déterminer et construire l'ensemble des points $M$ tels que $z'$ soit imaginaire pur.
3. Déterminer et construire l'ensemble des points $M$ tels que qu'un argument de $z'$ soit égal à $\dfrac{3\pi}{2}$.

**EXERCICE 2** **4 POINTS**

Soit un triangle isocèle (OAB) (OA = OB) et un point P variable du segment [AB], P $\neq$ A et P $\neq$ B.

La parallèle menée de P à la droite (OB) coupe la droite (OA) en A$'$ et la parallèle menée de P à la droite (OA) coupe la droite (OB) en B$'$.

1. Démontrer que OA$'$ = BB$'$.
2. En déduire qu'il existe une rotation $r$ telle que $r(\text{O}) = \text{B}$ et $r(\text{A}') = \text{B}'$ dont on déterminera l'angle en fonction de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{OA}},\ \overrightarrow{\text{OB}}\right)$.
   Démontrer que $r(\text{A}) = \text{O}$. Déterminer alors le centre $\Omega$ de cette rotation.
3. Démontrer que les quatre points O, A$'$, B$'$ et $\Omega$ sont cocycliques.

**PROBLÈME** **12 POINTS**

Le but du problème est :

— **A.** L'étude de la fonction $g$.
— **B.** La détermination d'un encadrement de $g$.
— **C.** L'évaluation d'une aire et de l'erreur commise.

On considère la fonction numérique $g$ définie su [0 ; 1] par

$$\left\{\begin{array}{lcl} g(t) & = & \left(1-\text{e}^{-t}\right)\ln t \quad \text{pour } 0 < t \leqslant 1\\ g(0) & = & 0\end{array}\right.$$

(ln désigne le logarithme népérien.)

**A.**

1. Démontrer que $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{1-\text{e}^{-t}}{t} = 1$.

2. Démontrer que $g$ est continue sur $[0\,;\,1]$. Étudier la dérivabilité de $g$ sur $[0\,;\,1]$ et démontrer pour tout réel $t$ de $]0\,;\,1]$ $g'(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\left(t\ln t + \mathrm{e}^{t} - 1\right)$.
3. Soit la fonction numérique $f$ définie sur $]0\,;\,1]$ par

$$f(t) = t\ln t + \mathrm{e}^{t} - 1.$$

   Étudier le sens de variation et les valeurs aux bornes de $f'$. Montrer que $f'$ s'annule une seule fois sur $]0\,;\,1]$ un point $t_0$ (on ne calculera pas $t_0$).
   En déduire le signe de $f'$ et le sens de variation de $f$ sur $]0\,;\,1]$.
   En déduire que $f$ ne s'annule qu'une seule fois sur $]0\,;\,1]$ pour une valeur $t_1$ (on ne calculera pas $t_1$).
4. Terminer l'étude de la fonction $g$. Tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ (unité = 6 cm). On tracera la tangente à la courbe au point d'abscisse 0. On admettra que $t_1 \approx 0,3$.

**B.**

Soit $n$ un entier naturel. On définit sur $[0\,;\,1]$ la fonction numérique $\varphi_n$ par

$$\varphi_0(t) = 1 \quad ; \quad \varphi_1(t) = 1 - t \quad ; \quad \varphi_2(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2!}.$$

et pour tout $n > 2$,

$$\varphi_n(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + (-1)^n\frac{t^n}{n!}.$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel non nul et pour tout réel $t$ de $[0\,;\,1]$ $\varphi_n'(t) = -varphi_{n-1}(t)$.
2. On se propose de démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et pour tout réel $t$ de $[0\,;\,1]$ : $\varphi_{2n+1}(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t} \leqslant \varphi_{2n}(t)$
   **a.** Soit $\Phi$ et $\Psi$ deux fonctions numériques définies sur $[0\,;\,1]$, dérivables sur $[0\,;\,1]$ telles que $\Phi(0) = \Psi(0)$.
   Démontrer que si pour tout réel $t$ de $[0\,;\,1]$ : $\Phi'(t) \leqslant \Psi'(t)$ alors pour tout réel $t$ de $[0\,;\,1]$, $\Phi(t) \leqslant \Psi(t)$.
   **b.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$ et pour tout réel $t$ de $[0\,;\,1]$ : $\varphi_{2n+1}(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t} \leqslant \varphi_{2n}(t)$.
3. Pour tout entier naturel n, déduire de la question précédente un encadrement de la fonction $g$ sur $]0\,;\,1]$ faisant intervenir les fonctions $\varphi_{2n}$ et $\varphi_{2n+1}$.

**C.**

On considère l'ensemble $\Delta$ des points $M$ du plan de coordonnées $(t\,;\,y)$ dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ vérifiant $0 \leqslant t \leqslant 1$ et $g(t) \leqslant y \leqslant 0$.
On se propose de déterminer une valeur approchée de l'aire de $\Delta$.

**1.** Soit $n$ un élément de $\mathbb{N}$ et $\alpha$ un réel tel que $0 < \alpha \leqslant 1$.
On pose

$$I_n(\alpha) = \int_{\alpha}^{1} t^n \ln t \, \mathrm{d}t.$$

Calculer $I_n(\alpha)$ en utilisant une intégration par parties. Déterminer la limite de $I_n(\alpha)$ lorsque $\alpha$ tend vers 0 par valeurs positives.

**2.** En utilisant le B. 3., donner un encadrement de $\displaystyle\int_{\alpha}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t$ au moyen des intégrales du type $I_n(\alpha)$.
En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_{0}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t$.

**3.** Donner en $\text{cm}^2$ une valeur approchée par excès de l'aire $\Delta$ à $10^{-2}$ près.