

∞ Baccalauréat C Amiens juin 1966 ∞  
**Mathématiques et mathématiques et technique**

Le candidat doit traiter l'exercice et le problème.

**EXERCICE 1**

Existe-t-il des nombres complexes  $z$  tels que les trois nombres  $z$ ,  $\frac{1}{z}$  et  $(1-z)$  aient le même module?  
Pour chaque valeur de  $z$  trouvée, représenter les images de  $z$ , de  $\frac{1}{z}$  et de  $(1-z)$ .

**EXERCICE 2**

Étant donné, dans le plan, un point  $O$  et une droite  $(D)$  passant par  $O$ , on considère la transformation ponctuelle  $T$  qui, à chaque point  $M$  du plan, associe le point  $M' = T(M)$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} OM' = 2OM, \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \text{ a pour bissectrice } (D). \end{array} \right.$$

Peut-on considérer cette transformation  $T$  comme la composée de deux transformations simples?  
Exprimer quatre décompositions possibles.

**EXERCICE 3**

Soit  $a$  un nombre donné, réel et positif. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (axes  $x'Ox$  et  $y'Oy$ ), on considère le point fixe  $A$  de coordonnées  $(a; a\sqrt{3})$  et sa projection,  $B$ , sur  $y'Oy$ .  
À chaque point  $M$  de  $x'Ox$  (déterminé par son abscisse  $m$ ) on associe le point  $P$ , orthocentre du triangle  $ABM$ .

1. Calculer les coordonnées de  $P$  en fonction de  $m$  et de  $a$  et construire la courbe  $(\Pi_a)$  décrite par  $P$  quand  $M$  décrit  $x'Ox$ .  
Reconnaître la nature de  $(\Pi_a)$  et préciser ses principaux éléments, notamment le foyer et la directrice.
2. On considère le cercle  $(C)$ , de centre  $P$ , de rayon  $PM$ . Utiliser les résultats précédents pour démontrer que les cercles  $(C)$  sont également tangents à un cercle fixe, que l'on précisera.  
 $T$  désignant le point de contact de ces cercles, démontrer que la droite  $TM$  passe par un point fixe,  $I$ , et qu'il existe un cercle fixe,  $(I)$ , de centre  $I$  que tous les cercles  $(C)$  coupent aux extrémités d'un de ses diamètres.  
Préciser le rayon de ce cercle  $(I)$ .
3.  $AM$  coupant  $y'Oy$  en  $N$ , les perpendiculaires en  $N$  à  $AM$  et en  $M$  à  $x'Ox$  se coupent en  $Q$ .  
Déterminer les coordonnées de  $Q$  et l'équation,  $y = f_a(x)$ , de la courbe  $(\Gamma_a)$ , lieu géométrique des points  $Q$ .  
Quelle particularité présente la tangente à  $(\Gamma_a)$  au point d'abscisse  $2a$ ?  
Étudier les variations de la fonction  $f_a$ .  
Construire le graphe dans le cas où  $a = 1$ .

**N. B.** - La question 3. peut être traitée indépendamment des deux autres.