Montpellier juin 1967
Baccalauréat mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

EXERCICE 1

Déterminer le nombre réel a pour que l'équation

$$z^3 - az^2 + 3az + 37 = 0$$

admette pour racine -1.
Calculer alors les deux autres racines, z_1 et z_2 dans l'ensemble, $\mathbb{C}$, des nombres complexes. Représenter les points A, M_1, M_2 d'affixes respectives -1, z_1 et z_2
Quelle est la nature du triangle AM_1M_2 ?

EXERCICE 2

1. Étudier les variations et tracer la courbe représentative (axes orthonormés) de la fonction qui, à la variable réelle x, fait correspondre

$$y = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 1}{x^2}.$$

2. Calculer l'aire du domaine limité par la courbe, les droites d'équations $x = 1$, $x = 3$ et la droite d'équation $y = x - 2$.

EXERCICE 3

Le plan est rapporté à un repère orLhonormé, $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$. On considère la transformation plane T qui, à un point m, de coordonnées x et y, fait correspondre, lorsqu'il existe, le point M, de coordonnées X et Y définies par les formules x2

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{lcl} X & = & \dfrac{x^2}{x+y} \\ Y & = & \dfrac{y^2}{x+y} \end{array}\right.$$

On désigne par P et Q les projections orthogonales de m sur $x'x$ et $y'y$ respectivement.

1. Quels sont les points qui n'ont pas de transformé par T ?
   Quels sont les points doubles de la transformation T ?
   Quel est le barycentre des points P et Q affectés des coefficients respectifs x et y ?
   Montrer que les formules (1) entraînent les formules suivantes :

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{lcl} (x-X)^2 & = & XY, \\ X - Y & = & x - y. \end{array}\right.$$

   Montrer que la droite Mm est parallèle à la droite d'équation $y = x$.
   Indiquer une construction géométrique de M, connaissant m.
   Réciproquement, les formules (2) entraînent-elles les formules (1) ?

2. Où faut-il choisir le point M pour que ce point puisse être considéré comme le transformé par T de deux points, m_1 et m_2, distincts ?

   Montrer que M est alors le milieu du segment $[m_1m_2]$ et que les droites $\text{O}m_1$ et $\text{O}m_2$ sont symétriques par rapport aux axes.

   On désigne par R et S les points. d'intersection (autres que O) du cercle, (O), circonscrit au triangle $\text{O}m_1m_2$ avec les axes. Montrer que RS est la médiatrice du segment $[m_1m_2]$. En déduire une construction des points m_1 et m_2, connaissant M.

   Montrer que les cercles (O) obtenus en faisant varier M forment un faisceau, dont on précisera la nature.

3. m décrit maintenant la droite d'équation $x = 1$. Montrer que M décrit alors la courbe (Γ) d'équation

$$Y = \frac{(X-1)^2}{X}.$$

   Étudier les variations de la fonction f définie par .

$$f(X) = \frac{(X-1)^2}{X}.$$

   et construire (Γ).

N. B. - La question 3 peut être traitée indépendamment des deux premières.