Baccalauréat série mathématiques Amiens septembre 1966

I.

On considère un triangle ABC et ses médianes, AM, BN et CP.

Démontrer que $\overrightarrow{\text{AM}} + \overrightarrow{\text{BN}} + \overrightarrow{\text{CP}} = \overrightarrow{0}$.

I étant un point donné, on construit les points J et K définis par $\overrightarrow{\text{IJ}} = \overrightarrow{\text{CP}}$ et $\overrightarrow{\text{IK}} = -\overrightarrow{\text{BN}}$.

Démontrer (IE étant la médiane issue de I du triangle IJK) que

$$\overrightarrow{\text{IE}} = -4\overrightarrow{\text{BC}}.$$

II.

Étant donné, dans le plan, un point O et une droite (D) passant par O, on considère la transformation ponctuelle T qui associe à chaque point M du plan différent de O, le point M$'$ = T(M) tel que

$$\left\{\begin{array}{l}\text{OM}.\text{OM}' = 4,\\ (\text{OM},\ \text{OM}') \text{ a pour bissectrice (D).}\end{array}\right.$$

Peut-on considérer cette transformation T comme la composée de deux transformations simples? Exprimer quatre décompositions possibles.

III.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (axes $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$), on considère le point P de coordonnées $(x\ ;\ y)$, sa projection, N, sur $x'\text{O}x$ et, sur $y'\text{O}y$, le point M d'ordonnée m. Dans tout le problème (excepté au 3. a.) on suppose que x, y et m sont des nombres réels positifs.

1. **a.** Déterminer les coordonnées des points g et g', centres de gravité des triangles OMN et MNP, ainsi que les aires, $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$, de ces triangles.

   b. On considère le point G défini par la relation

   $$\mathscr{A}\,\overrightarrow{\text{G}g} + \mathscr{A}'\,\overrightarrow{\text{G}'g'} = \overrightarrow{0}\,;$$

   calculer les coordonnées X et Y de G.

2. **a.** Dans le cas particulier où $x = 1$ et où le trapèze ONPM a une aire égale à 1, exprimer les coordonnées X et Y de G en fonction de m. Préciser l'intervalle auquel appartient le nombre m.

   b. En déduire que l'ensemble des points G est un arc de parabole, que l'on construira avec précision.

   c. Démontrer que la tangente à cette parabole en chacun de ses points, G, est parallèle à la droite MP correspondante.

3. **a.** Étude des variations et graphe de la fonction f qui, à x réel, fait correspondre,

   $$y = f(x) = \frac{-2x^2 + 12x}{x^2 - 6x + 12}.$$

   b. Le point G étant donné par ses coordonnées, $X = Y = 2$, exprimer la relation indépendante de m qui existe entre les coordonnées du point P.

   c. Déterminer avec précision l'ensemble des points P.