

❧ Baccalauréat série mathématiques Amiens septembre 1966 ❧

I.

On considère un triangle ABC et ses médianes, AM, BN et CP.

Démontrer que $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$.

I étant un point donné, on construit les points J et K définis par $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{CP}$ et $\overrightarrow{IK} = -\overrightarrow{BN}$.

Démontrer (IE étant la médiane issue de I du triangle IJK) que

$$\overrightarrow{IE} = -4\overrightarrow{BC}.$$

II.

Étant donné, dans le plan, un point O et une droite (D) passant par O, on considère la transformation ponctuelle T qui associe à chaque point M du plan différent de O, le point M' = T(M) tel que

$$\begin{cases} \text{OM} \cdot \text{OM}' = 4, \\ (\text{OM}, \text{OM}') \text{ a pour bissectrice (D).} \end{cases}$$

Peut-on considérer cette transformation T comme la composée de deux transformations simples?

Exprimer quatre décompositions possibles.

III.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (axes $x'Ox$ et $y'Oy$), on considère le point P de coordonnées $(x; y)$, sa projection, N, sur $x'Ox$ et, sur $y'Oy$, le point M d'ordonnée m . Dans tout le problème (excepté au 3. a.) on suppose que x , y et m sont des nombres réels positifs.

1. a. Déterminer les coordonnées des points g et g' , centres de gravité des triangles OMN et MNP, ainsi que les aires, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$, de ces triangles.
- b. On considère le point G défini par la relation

$$\mathcal{A} \overrightarrow{Gg} + \mathcal{A}' \overrightarrow{G'g'} = \vec{0};$$

calculer les coordonnées X et Y de G.

2. a. Dans le cas particulier où $x = 1$ et où le trapèze ONPM a une aire égale à 1, exprimer les coordonnées X et Y de G en fonction de m . Préciser l'intervalle auquel appartient le nombre m .
 - b. En déduire que l'ensemble des points G est un arc de parabole, que l'on construira avec précision.
 - c. Démontrer que la tangente à cette parabole en chacun de ses points, G, est parallèle à la droite MP correspondante.
3. a. Étude des variations et graphe de la fonction f qui, à x réel, fait correspondre,

$$y = f(x) = \frac{-2x^2 + 12x}{x^2 - 6x + 12}.$$

- b.** Le point G étant donné par ses coordonnées, $X = Y = 2$, exprimer la relation indépendante de m qui existe entre les coordonnées du point P.
- c.** Déterminer avec précision l'ensemble des points P.