Durée : 4 heures

Baccalauréat C Amiens juin 1970

EXERCICE 1

Un nombre complexe étant désigné par z, on note $\overline{z}$ son conjugué et $|z|$ son module.
Quel est l'ensemble des points du plan dont l'affixe, z, satisfait à la relation

$$z+\overline{z}=|z|.$$

Représenter cet ensemble,

EXERCICE 2

Étude de la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{|x-1|}$$

Construire la représentation graphique dans un repère orthonormé.

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$. On désigne par (Δ) la droite d'équation $y=x$, par S_Δ et S_y les symétries, respectivement par rapport à (Δ) et à $y'\mathrm{O}y$.
Un point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ sera noté $M(x\,;\,y)$.
Le nombre h étant un réel donné, on considère la transformation T_h qui, à chaque point $M(x\,;\,y)$, fait correspondre le point $M_1\left(x_1\,;\,y_1\right)$ tel que

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{lcl} x_1 &=& hx,\\ y_1 &=& x+hy.\end{array}\right.$$

1. **a.** La transformation T_h a-t-elle des points doubles ?

   b. Montrer que la transformation T_0 correspondant à la valeur $h=0$, est le produit, dans cet ordre, de la symétrie S_Δ et d'une transformation simple, que l'on précisera.

   c. On se donne deux réels, h et h'. Écrire les formules définissant la transformation $T_{h'}\circ T_h$. Reconnaître cette transformation dans le cas où $h'=-h$.

   d. On considère le produit, dans cet ordre, des quatre transformations S_Δ, T_h, S_y et T_h ; soit U ce produit,

   $$U=T_h\circ S_y\circ T_h\circ S_\Delta$$

   Le point $M(x\,;\,y)$ est transformé par U en P

   $$[P=U(M)],$$

   de coordonnées $(X\,;\,Y)$. Montrer que

   $$\left\{\begin{array}{lcl} X &=& -h^2y,\\ Y &=& h^2x.\end{array}\right.$$

   On pose $Z=X+\mathrm{i}Y$ et $z=x+\mathrm{i}y$. Exprimer Z en fonction de z et reconnaître la transformation U.

2. On examine, dans cette partie, la transformation T_1

$$\left\{\begin{array}{l c l} x_1 & = & x, \\ y_1 & = & x+y. \end{array}\right.$$

a. Le point H désignant la projection orthogonale de M sur l'axe $y'\text{O}y$, préciser les directions des droites MM_1 et HM_1 lorsque M et M_1 sont distincts. En déduire la construction de $M_1 = T_1(M)$ connaissant M.

b. Soit (H) l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 9$.

Soit (H_1) la courbe transformée de l'hyperbole (H) par la transformation T_1. Quelle relation les coordonnées $(x\,;\,y)$ d'un point M du plan doivent-elles vérifier pour que M appartienne à (H_1) ? Cette relation caractérise-t-elle les points de (H_1) ?

Construire (H) et (H_1) dans le même repère $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$.

c. Rechercher tous les points de (H) dont les coordonnées sont toutes deux des entiers relatifs. En déduire tous les points à coordonnées entières de (H_1).

3. On reprend la transformation T_h définie par les formules (1). Partant d'un point donné $M_0\left(x_0\,;\,y_0\right)$, on désigne par $M_1\left(x_1\,;\,y_1\right), M_2\left(x_2\,;\,y_2\right), \ldots, M_n\left(x_n\,;\,y_n\right)$ les transformés par T_h de $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}$:

$$M_1 = T_h\left(M_0\right), M_2 = T_h\left(M_1\right), \ldots, M_n = T_h\left(M_{n-1}\right).$$

a. Calculer x_n et y_n en fonction de h, x_0 et y_0. Montrer que, dans le cas où x_0 et h sont tous deux strictement positifs et h différent de 1, on peut écrire

$$y_n = \alpha x_n \text{Log}\, x_n + \beta x_n$$

où α et β sont des constantes, que l'on exprimera en fonction de x_0, y_0 et h.

b. x_0 étant strictement positif et h strictement positif et différent de 1, comment faut-il choisir h pour que x_n tende vers une limite finie quand n tend vers l'infini ?

Quelle est cette limite ?

Montrer qu'alors y_n tend vers zéro quand n tend vers l'infini.