Baccalauréat ES

Enseignement de spécialité

Sessions de juin 2004 au 22 juin 2018

(127 exercices)

Nota. Les exercices dont le contenu n'est plus au programme (tel que la coloration d'un graphe) ou ne traitant que de l'étude d'une suite arithmético-géométrique n'ont pas été proposés ici.

Durée totale de l'épreuve : 3 *heures*
Coefficient : 7

Chacun des problèmes suivants était noté sur 5 points et devait donc être traité en 45 *minutes.*

Source des annales : `https://www.apmep.fr/`
Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public

MEP : A. Gazagnes

Table des matières

1 **Extrait de la session « Antilles », Juin 2004** **7**

2 **Extrait de la session « Métropole », Juin 2004** **8**

3 **Extrait de la session « Liban », Juin 2004** **9**

4 **Extrait de la session « Polynésie », Juin 2004** **10**

5 **Extrait de la session « Antilles – Guyane », Septembre 2004** **11**

6 **Extrait de la session « Métropole – La Réunion », Septembre 2012** **12**

7 **Extrait de la session « Amérique du Sud », Novembre 2004** **13**

8 **Extrait de la session « Centres étrangers », Juin 2005** **14**

9 **Extrait de la session « Antilles – Guyane », Septembre 2005** **15**

10 **Extrait de la session « Métropole – La Réunion », 17 septembre 2005** **16**

11 **Extrait de la session « Amérique du Sud », Novembre 2005** **17**

12 **Extrait de la session « Pondichéry », 3 avril 2006** **18**

13 **Extrait de la session « Amérique du Nord », 31 mai 2006** **19**

14 **Extrait de la session « Centres étrangers », Juin 2006** **20**

15 **Extrait de la session « Métropole », 15 juin 2006** **21**

16 **Extrait de la session « Antilles – Guyane », Septembre 2006** **22**

17 **Extrait de la session « Polynésie », Septembre 2006** **23**

18 **Extrait de la session « Nouvelle-Calédonie », Novembre 2006** **24**

19 **Extrait de la session « Nouvelle Calédonie », Mars 2007** **25**

20 **Extrait de la session « Métropole – La Réunion », Septembre 2007** **26**

21 **Extrait de la session « Nouvelle-Calédonie », Novembre 2007** **27**

22 **Extrait de la session « Amérique du Nord », 29 mai 2008** **28**

23 **Extrait de la session « Antilles – Guyane », Juin 2008** **29**

24 **Extrait de la session « Métropole », 19 juin 2008** **30**

25 **Extrait de la session « La Réunion », Juin 2008** **31**

26 **Extrait de la session « Polynésie », Juin 2008** **32**

27 **Extrait de la session « Métropole – La Réunion », Septembre 2008** **33**

28 **Extrait de la session « Amérique du Sud », Novembre 2008** **34**

29 **Extrait de la session « Pondichéry », 16 avril 2009** **35**

30 **Extrait de la session « Asie », 16 juin 2009** **36**

31 Extrait de la session « Centres étrangers », 15 juin 2009 **37**

32 Extrait de la session « Antilles – Guyane », Septembre 2009 **38**

33 Extrait de la session « Polynésie », Septembre 2009 **39**

34 Extrait de la session « Nouvelle-Calédonie », Novembre 2009 **40**

35 Extrait de la session « Liban », 31 mai 2010 **41**

36 Extrait de la session « Amérique du Nord », 3 Juin 2010 **42**

37 Extrait de la session « Antilles – Guyane », Juin 2010 **43**

38 Extrait de la session « Pondichéry », 13 avril 2011 **44**

39 Extrait de la session « Liban », 30 mai 2011 **46**

40 Extrait de la session « Polynésie », 10 juin 2011 **47**

41 Extrait de la session « Métropole », Juin 2011 **49**

42 Extrait de la session « Amérique du Sud », 16 novembre 2011 **50**

43 Extrait de la session « Amérique du Nord », 31 mai 2012 **51**

44 Extrait de la session « Liban », 29 mai 2012 **52**

45 Extrait de la session « Polynésie », 8 juin 2012 **53**

46 Extrait de la session « Antilles – Guyane », 19 juin 2012 **54**

47 Extrait de la session « Asie », 20 juin 2012 **55**

48 Extrait de la session « Centres étrangers », 13 juin 2012 **56**

49 Extrait de la session « Métropole », 22 juin 2012 **57**

50 Extrait de la session « Polynésie », 13 septembre 2012 **58**

51 Extrait de la session « Antilles – Guyane », 14 septembre 2012 **59**

52 Extrait de la session « Amérique du Sud », 14 novembre 2012 **60**

53 Extrait de la session « Nouvelle-Calédonie », 19 novembre 2012 **61**

54 Extrait de la session « Pondichéry », 15 avril 2013 **62**

55 Extrait de la session « Amérique du Nord », 30 mai 2013 **63**

56 Extrait de la session « Liban », 28 mai 2013 **64**

57 Extrait de la session « Polynésie », 7 juin 2013 **65**

58 Extrait de la session « Antilles – Guyane », 19 juin 2013 **66**

59 Extrait de la session « Asie », 19 juin 2013 **67**

60 Extrait de la session « Centres étrangers », 12 juin 2013 **68**

61 Extrait de la session « Métropole », 21 juin 2013 **69**

62 Extrait de la session « Métropole », 21 juin 2013 (sujet dévoilé) 70

63 Extrait de la session « Polynésie », 4 septembre 2013 71

64 Extrait de la session « Antilles–Guyane », 12 septembre 2013 72

65 Extrait de la session « Métropole, La Réunion », 13 septembre 2013 73

66 Extrait de la session « Amérique du Sud », 21 novembre 2013 74

67 Extrait de la session « Nouvelle-Calédonie », 18 novembre 2013 76

68 Extrait de la session « Pondichéry », 7 avril 2014 77

69 Extrait de la session « Liban », 27 mai 2014 79

70 Extrait de la session « Amérique du Nord », 30 mai 2014 80

71 Extrait de la session « Centres étrangers », 12 juin 2014 81

72 Extrait de la session « Polynésie », 13 juin 2014 83

73 Extrait de la session « Antilles–Guyane », 19 juin 2014 84

74 Extrait de la session « Asie », 19 juin 2014 85

75 Extrait de la session « Métropole », 20 juin 2014 86

76 Extrait de la session « Polynésie », 10 septembre 2014 87

77 Extrait de la session « Métropole », 12 septembre 2014 88

78 Extrait de la session « Amérique du Sud », 17 novembre 2014 89

79 Extrait de la session « Nouvelle-Calédonie », 17 novembre 2014 90

80 Extrait de la session « Pondichéry », 15 avril 2015 92

81 Extrait de la session « Liban », 27 mai 2015 93

82 Extrait de la session « Amérique du Nord », 2 juin 2015 95

83 Extrait de la session « Centres étrangers », 10 juin 2015 97

84 Extrait de la session « Polynésie », 12 juin 2015 98

85 Extrait de la session « Asie », 16 juin 2015 99

86 Extrait de la session « Antilles – Guyane », 24 juin 2015 100

87 Extrait de la session « Métropole – La Réunion », 24 juin 2015 101

88 Extrait de la session « Polynésie », 9 septembre 2015 103

89 Extrait de la session « Antilles – Guyane », Septembre 2015 104

90 Extrait de la session « Métropole – La Réunion », 11 septembre 2015 105

91 Extrait de la session « Nouvelle-Calédonie », 19 novembre 2015 106

92 Extrait de la session « Amérique du Sud », 25 novembre 2015 107

93 Extrait de la session « Nouvelle-Calédonie », mars 2016 108

94 Extrait de la session « Pondichéry », 21 avril 2016 109

95 Extrait de la session « Liban », 31 mai 2016 110

96 Extrait de la session « Amérique du Nord », 1er juin 2016 112

97 Extrait de la session « Centres étrangers », 8 juin 2016 113

98 Extrait de la session « Polynésie », 10 juin 2016 114

99 Extrait de la session « Métropole – La Réunion », 22 juin 2016 115

100 Extrait de la session « Asie », 22 juin 2016 116

101 Extrait de la session « Antilles-Guyane », 23 juin 2016 118

102 Extrait de la session « Métropole – La Réunion », 14 septembre 2016 119

103 Extrait de la session « Antilles-Guyane », septembre 2016 121

104 Extrait de la session « Nouvelle-Calédonie », 16 novembre 2016 122

105 Extrait de la session « Amérique du Sud », 24 novembre 2016 (6 points) 123

106 Extrait de la session « Nouvelle-Calédonie », mars 2017 125

107 Extrait de la session « Pondichéry », 26 avril 2017 126

108 Extrait de la session « Amérique du Nord », 2 juin 2017 (4 points) 127

109 Extrait de la session « Liban », 5 juin 2017 128

110 Extrait de la session « Centres étrangers », 13 juin 2017 130

111 Extrait de la session « Antilles-Guyane », 14 juin 2017 131

112 Extrait de la session « Polynésie », 16 juin 2017 132

113 Extrait de la session « Métropole – Réunion », 21 juin 2017 133

114 Extrait de la session « Asie », 22 juin 2017 134

115 Extrait de la session « Métropole (copies volées) », 28 juin 2017 135

116 Extrait de la session « Antilles-Guyane », 7 septembre 2017 136

117 Extrait de la session « Métropole – La Réunion », 12 septembre 2017 137

118 Extrait de la session « Amérique du Sud », 23 novembre 2017 138

119 Extrait de la session « Nouvelle-Calédonie », 28 novembre 2017 139

120 Extrait de la session « Pondichéry », 4 mai 2018 140

121 Extrait de la session « Liban », 29 mai 2018 141

122 Extrait de la session « Amérique du Nord », 29 mai 2018 142

123 Extrait de la session « Centres étrangers », 11 juin 2018 144

124 Extrait de la session « Antilles – Guyane », 19 juin 2018 146

125 Extrait de la session « Asie », 21 juin 2018 (4 points) 147

126 Extrait de la session « Métropole – La Réunion », 22 juin 2018 148

127 Extrait de la session « Polynésie », 22 juin 2018 (4 points) 150

1 Extrait de la session « Antilles », Juin 2004

On s'intéresse aux performances réalisées par des étudiants courant le 200 mètres dans les compétitions universitaires.
Lors d'une compétition, le score d'un(e) étudiant(e) est son meilleur temps en secondes obtenu aux 200 m.

Une enquête a permis d'établir le comportement général suivant, qu'on supposera valable pour les filles et les garçons dans toute la suite :

- lors de la première compétition, le score d'un(e) étudiant(e) est toujours supérieur ou égal à 25 secondes. ;
- si, lors de la n-ième compétition, l'étudiant(e) a réalisé un score strictement inférieur à 25 secondes, la probabilité qu'il (elle) réalise encore un score strictement inférieur à 25 secondes lors de la $(n+1)$-ième compétition est de $\frac{2}{5}$;
- si, lors de la n-ième compétition, l'étudiant(e) a réalisé un score supérieur ou égal à 25 secondes, la probabilité qu'il (elle) réalise encore un score strictement inférieur à 25 secondes est $\frac{1}{5}$.

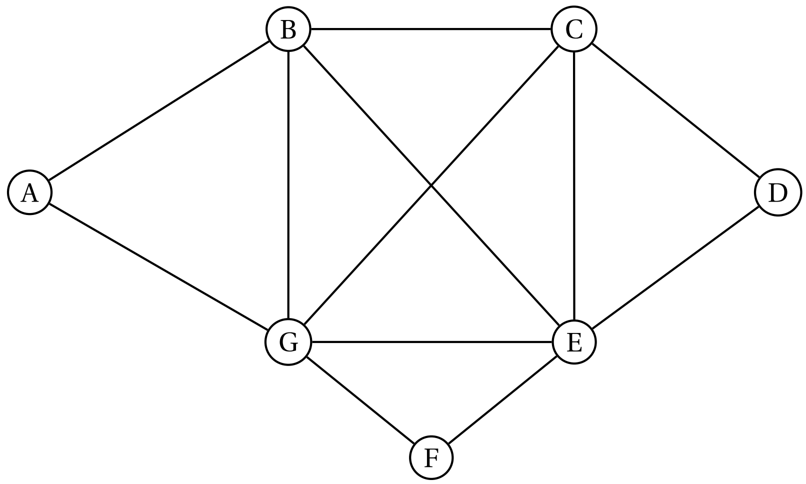
On représente les données précédentes par un graphe probabiliste G à deux états.
On note A tout score strictement inférieur à 25 secondes et B tout score supérieur ou égal à 25 secondes.

On note a_n la probabilité d'obtenir un score A lors de la compétition n et b_n la probabilité d'obtenir un score B lors de la compétition n.
L'état probabiliste lors de la compétition n est donc représenté par la matrice ligne $(a_n \;\; b_n)$.

1. Représenter G et donner sa matrice.
2. Jamalia, jeune étudiante, se présente à sa première compétition universitaire.
   a. Calculer la probabilité qu'elle réalise un score strictement inférieur à 25 secondes aux 200 mètres lors de cette compétition.
   b. Calculer la probabilité qu'elle réalise un score strictement inférieur à 25 secondes aux 200 mètres lors de sa troisième compétition.
3. Déterminer l'état stable du graphe G.
4. Julien a déjà de nombreuses compétitions universitaires dans les jambes.
   Montrer que, pour sa prochaine compétition, il a environ une chance sur quatre de réaliser un score strictement inférieur à 25 secondes aux 200 mètres.

2 Extrait de la session « Métropole », Juin 2004

Le graphe ci-dessous indique, sans respecter d'échelle, les parcours possibles entre les sept bâtiments d'une entreprise importante.



Un agent de sécurité effectue régulièrement des rondes de surveillance.
Ses temps de parcours en minutes entre deux bâtiments sont les suivants :

AB : 16 minutes	AG : 12 minutes	BC : 8 minutes	BE : 12 minutes
BG : 8 minutes	CD : 7 minutes	CE : 4 minutes	CG : 10 minutes
DE : 2 minutes	EF : 8 minutes	EG : 15 minutes	FG : 8 minutes

Sur chaque arête, les temps de parcours sont indépendants du sens de parcours.

1. En justifiant la réponse, montrer qu'il est possible que l'agent de sécurité passe une fois et une seule par tous les chemins de cette usine.

   Donner un exemple de trajet.

2. L'agent de sécurité peut-il revenir à son point de départ après avoir parcouru une fois et une seule tous les chemins ? Justifier la réponse.

3. Tous les matins, l'agent de sécurité part du bâtiment A et se rend au bâtiment D.

   En utilisant un algorithme que l'on explicitera, déterminer le chemin qu'il doit suivre pour que son temps de parcours soit le plus court possible, et donner ce temps de parcours.

3 Extrait de la session « Liban », Juin 2004

Lors d'une partie de fléchettes, un joueur envoie une à une des fléchettes vers une cible. La tentative est réussie quand la fléchette atteint la cible, elle échoue dans le cas contraire.
Pour la première fléchette, les chances de réussite ou d'échec sont égales.

Pour chaque lancer suivant, la probabilité qu'il réussisse dépend uniquement du résultat du lancer précédent :

- elle est de 0,7 quand le lancer précédent atteint la cible ;
- elle est de 0,4 quand il a échoué.

On note :

- C_n l'évènement « la n-ième fléchette atteint la cible » ;
- E_n l'évènement « le n-ième lancer a échoué ».

1. La partie ne comporte que deux fléchettes. Traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré. En déduire la probabilité pour que la deuxième fléchette atteigne la cible.

Dans toute la suite de l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 1 et on considère que le jeu se déroule avec n fléchettes.

On désigne par c_n la probabilité d'atteindre la cible lors du n-ième lancer et par e_n la probabilité que ce lancer échoue.
On note $P_n = (c_n \quad e_n)$ la matrice ligne qui traduit l'état probabiliste lors du n-ième lancer.
La matrice $P_1 = (0{,}5 \quad 0{,}5)$ traduit donc l'état probabiliste initial lors du premier lancer.

2. **a.** Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste.

b. Donner l'état P_2 .

3. **a.** À l'aide de la relation $P_{n+1} = P_n \times \mathrm{A}$ où A est la matrice de transition $\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$, exprimer la probabilité c_{n+1} d'atteindre la cible lors du $(n+1)$-ième lancer en fonction des probabilités c_n et e_n .

b. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $c_{n+1} = 0{,}3\,c_n + 0{,}4$.

4. Soit la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, par $u_n = c_n - \dfrac{4}{7}$.

a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,3.

b. En déduire u_n puis c_n en fonction de n.

c. Calculer la limite de c_n quand n tend vers l'infini.
Interpréter cette limite.

4 Extrait de la session « Polynésie », Juin 2004

Étude de l'évolution météorologique d'un jour à l'autre dans une localité

Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions rationnelles.

Partie A

- S'il fait sec aujourd'hui, alors il fera encore sec demain avec la probabilité $\frac{5}{6}$, donc il fera humide demain avec la probabilité $\frac{1}{6}$;
- s'il fait humide aujourd'hui, alors il fera encore humide demain avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

Nous sommes dimanche et il fait sec.
On s'intéresse à l'évolution météorologique des jours suivants.

1. Construire un arbre de probabilité représentant la situation de dimanche à mercredi.
2. En déduire la probabilité des évènements suivants :
   a. J : « il fera sec lundi, mardi et mercredi » ;
   b. K : « il fera sec mardi » ;
   c. L : « il fera humide mercredi ».

Partie B

1. Soit n un entier naturel.
   On note :
   - s_n la probabilité pour que, le jour n, il fasse sec ;
   - h_n la probabilité pour que, le jour n, il fasse humide ;
   - P_n la matrice (s_n, h_n) traduisant l'état probabiliste du tempsle jour n.

   Déterminer une relation entre s_n et h_n .
2. **a.** Si le premier dimanche est le jour correspondant à $n = 0$, donner la matrice associée à l'état initial du temps.
   b. Décrire l'évolution de cet état à l'aide d'un graphe probabiliste.
3. La matrice M de ce graphe est $\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$
   a. Déterminer M^2 (utiliser la calculatrice).
   b. Expliquer comment retrouver à l'aide de la matrice M, la situation du mardi étudiée dans la partie A.
4. **a.** Déterminer l'état stable associé à l'évolution météorologique.
   b. En déduire, qu'à long terme, la probabilité qu'il pleuve un certain jour est $\frac{1}{3}$.

5 Extrait de la session « Antilles – Guyane », Septembre 2004

Lucien, fumeur impénitent, décide d'essayer de ne plus fumer.

S'il ne fume pas un jour donné, la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est 0,3.
Par contre, s'il fume un jour donné, la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est 0,9.

On note F l'évènement « Lucien fume » et $\overline{F}$ l'évènement contraire.

1. Traduire ces informations à l'aide d'un graphe probabiliste dont les sommets seront notés F et $\overline{F}$.

On admet que la matrice M associée au graphe est $\begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, l'état probabiliste le n-ième jour est défini par la matrice ligne $P_n = (a_n \quad b_n)$ où a_n désigne la probabilité que Lucien fume le n-ième jour et b_n la probabilité que Lucien ne fume pas le n-ième jour.

a. On suppose que le premier jour la probabilité que Lucien fume est 0,2.
Déterminer P_1 .

b. Calculer M^2 et en déduire P_3 .

c. Déterminer P_{n+1} en fonction de P_n et en déduire la probabilité que Lucien fume le $(n+1)$-ième jour en fonction de a_n et b_n .

d. On considère la matrice ligne $P = (a \quad b)$ où a et b sont deux réels tels que $a + b = 1$.
Déterminer a et b pour que $P = PM$.
En déduire la limite de a_n quand n tend vers $+\infty$.

6 Extrait de la session « Métropole – La Réunion », Septembre 2012

On considère une grande population d'acheteurs de yaourts.
On suppose que l'effectif de cette population est stable.

Une entreprise commercialise des yaourts sous la marque Y.
30 % des acheteurs de yaourts achètent la marque Y.
L'entreprise décide de faire une campagne publicitaire pour améliorer ses ventes.

Au bout d'une semaine, une enquête indique que :

- 20 % des acheteurs de yaourts qui achetaient la semaine précédente des yaourts des autres marques achètent maintenant des yaourts Y ;
- 10 % des acheteurs de yaourts qui achetaient la semaine précédente des yaourts Y achètent maintenant des yaourts des autres marques.

L'entreprise continue sa campagne publicitaire. On fait l'hypothèse que l'évolution des résultats obtenus à l'issue de la première semaine de campagne publicitaire est la même les semaines suivantes.

1. Dessiner le graphe probabiliste correspondant à cette situation.

2. Soit $X_0 = \begin{pmatrix}0,3 & 0,7\end{pmatrix}$ la matrice ligne décrivant l'état initial de la population.

a. Donner la matrice de transition (notée A) associée au graphe précédent.

b. Déterminer la probabilité qu'un acheteur de yaourts choisi au hasard après deux semaines de campagne publicitaire, achète des yaourts de la marque Y.

3. On admet que pour tout entier naturel n on a : $A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3}+\left(\dfrac{1}{3}\right)0,7^n & \dfrac{1}{3}-\left(\dfrac{1}{3}\right)0,7^n \\ \dfrac{2}{3}-\left(\dfrac{2}{3}\right)0,7^n & \dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{2}{3}\right)0,7^n \end{pmatrix}$.

Avec l'hypothèse ci-dessus, l'entreprise peut-elle espérer atteindre une part de marché de 70 % ? Justifier.

7 Extrait de la session « Amérique du Sud », Novembre 2004

Au cours de la première semaine de l'année scolaire, un professeur propose aux élèves de sa classe le choix entre deux sorties pédagogiques une sortie A et une sortie B.
20 % des élèves de la classe sont favorables à la sortie A et tous les autres élèves sont favorables à la sortie B.
Les arguments des uns et des autres font évoluer cette répartition en cours d'année.
Ainsi 30 % des élèves favorables à la sortie A et 20 % des élèves favorables à la sortie B changent d'avis la semaine suivante.

On note :

- a_n la probabilité qu'un élève soit favorable à la sortie A la semaine n ;
- b_n la probabilité qu'un élève soit favorable à la sortie B la semaine n ;
- P_n la matrice $(a_n\ ;\ b_n)$ traduisant l'état probabiliste la semaine n.

1. Déterminer l'état initial P_1 .

2. Représenter la situation par un graphe probabiliste.

3. En déduire que $P_{n+1} = P_n \times M$ où M est la matrice $\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$

4. Déterminer l'état probabiliste P_3 et en déduire la probabilité qu'un élève soit favorable à la sortie A la troisième semaine.

5. Déterminer le réel x tel que $(x\ ;\ 1-x) \times \text{M} = (x\ ;\ 1-x)$.
On admet que la suite (a_n) est croissante.
La sortie A finira-t-elle par être préférée à la sortie B ?

8 Extrait de la session « Centres étrangers », Juin 2005

On a divisé une population en deux catégories : « fumeurs » et « non-fumeurs ».

Une étude statistique a permis de constater que, d'une génération à l'autre,

- 60 % des descendants de fumeurs sont des fumeurs ;
- 10 % des descendants de non-fumeurs sont des fumeurs.

On suppose que le taux de fécondité des fumeurs est le même que celui des non-fumeurs.

On désigne par :

- f_n le pourcentage de fumeurs à la génération de rang n ;
- $g_n = 1 - f_n$ le pourcentage de non-fumeurs à la génération de rang n, où n est un entier naturel.

On considère qu'à la génération 0, il y a autant de fumeurs que de non-fumeurs.
On a donc $f_0 = g_0 = 0{,}5$.

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste.

2. Justifier l'égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} f_{n+1} & g_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n & g_n \end{pmatrix} \times A$$

où A désigne la matrice $\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$

3. Déterminer le pourcentage de fumeurs à la génération de rang 2.

4. Déterminer l'état probabiliste stable et l'interpréter.

5. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$f_{n+1} = 0{,}5\, f_n + 0{,}1$$

6. On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = f_n - 0{,}2$.

- **a.** Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
- **b.** Donner l'expression de u_n en fonction de n.
- **c.** En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$f_n = 0{,}3 \times 0{,}5^n + 0{,}2$$

- **d.** Déterminer la limite de la suite (f_n) lorsque n tend vers $+\infty$ et l'interpréter.

9 Extrait de la session « Antilles – Guyane », Septembre 2005

Sur un marché où seul un produit A était présent, un nouveau produit B est mis en vente à partir de l'année 2003. Une enquête a montré que :

- la probabilité qu'un client de A, une année donnée, reste fidèle à A l'année suivante est 0,67 ;
- la probabilité qu'un client de B, une année donnée, choisisse A l'année suivante est 0,27 .

On suppose que la clientèle totale pour les deux produits ne change pas.
On prend un client au hasard l'année $(2002+n)$.

Notations :

- Si un joueur fait partie de l'équipe A, la probabilité qu'il reste dans cette équipe pour le match suivant est 0,6.
- Si un joueur fait partie de l'équipe B, la probabilité qu'il change d'équipe le match suivant est 0,2.

- On appelle A l'état « acheter le produit A ».
- On appelle B l'état « acheter le produit B ».
- On note a_n la probabilité que ce client achète A pendant l'année $(2002+n)$.
- On note b_n la probabilité que ce client achète B pendant l'année $(2002+n)$.
- On a donc $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets A et B.
La matrice M de ce graphe probabiliste, en considérant les sommets du graphe dans l'ordre A puis B, est donc :

$$M = \begin{pmatrix} 0,67 & 0,33 \\ 0,27 & 0,73 \end{pmatrix}$$

2. On appelle $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice décrivant l'état probabiliste de la clientèle l'année $(2002+n)$

a. Donner la relation matricielle liant l'état P_1 à l'état P_0.
Calculer P_1 et traduire ce résultat par une phrase.

b. Calculer et traduire de même l'état P_2 .

3. **a.** Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n .
En déduite que, pour tout entier n, on a :

$$a_{n+1} = 0,67\,a_n + 0,27\,b_n \quad \text{puis} \quad a_{n+1} = 0,4\,a_n + 0,27.$$

b. On définit la suite (u_n) par $u_n = a_n - 0,45$ pour tout entier n.
Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

c. Exprimer u_n puis a_n et b_n en fonction de n.

4. **a.** Quelles sont les limites respectives a et b des suites (a_n) et (b_n) ?
Exprimer ces résultats en termes de répartition sur le marché des produits A et B.

b. On pose $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$.
Vérifier que $P = P \times M$.
Que représente l'état P ?
Dépend-il de l'état initial P_0 ?

10 Extrait de la session « Métropole – La Réunion », 17 septembre 2005

Mademoiselle Z travaille dans une société spécialisée dans la vente par téléphone.
Chaque jour, elle doit appeler une liste de clients pour leur proposer un produit particulier.

Après avoir observé un grand nombre d'appels de Mademoiselle Z, on peut faire l'hypothèse suivante :

- si un client contacté répond favorablement (situation A), cela donne de l'assurance à Mademoiselle Z et elle arrive à convaincre le client suivant une fois sur deux ;
- si le client contacté ne répond pas favorablement (situation B), Mademoiselle Z se décourage et n'arrive à convaincre le client suivant qu'une fois sur cinq.

1. **a.** Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets A et B.

b. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

2. Ce lundi, Mademoiselle Z est en forme et elle a convaincu le premier client d'acheter le produit proposé.
La matrice ligne décrivant l'état initial au premier appel est donc $P_0 = (1 \quad 0)$.
Donner la matrice ligne P_1 exprimant l'état probabiliste au deuxième appel.

3. On donne la matrice $M^5 = \begin{pmatrix} 0{,}287\,45 & 0{,}712\,55 \\ 0{,}285\,02 & 0{,}714\,98 \end{pmatrix}$

a. Calculer le produit $P_0\, M^5$.
En déduire la probabilité que Mademoiselle Z convainque son sixième client ce lundi.

b. Quelle aurait été la probabilité que Mademoiselle Z convainque son sixième client si elle n'avait pas convaincu le premier ?

4. Déterminer l'état stable du système.
Comment peut-on l'interpréter ?

11 Extrait de la session « Amérique du Sud », Novembre 2005

Au 1er janvier 2000, la population d'une ville se répartit également entre locataires et propriétaires.
La population globale ne varie pas mais, chaque année, pour raisons familiales ou professionnelles, 10 % des propriétaires deviennent locataires tandis que 20 % des locataires deviennent propriétaires.

On désigne par p_n la probabilité qu'un habitant de la ville choisi au hasard, soit propriétaire au 1er janvier de l'année $2000+n$ (n entier supérieur ou égal à 0), et par ℓ_n la probabilité qu'il soit locataire.
La matrice $P_0 = (0,5\ \ 0,5)$ traduit l'état probabiliste initial et la matrice $P_n = \begin{pmatrix} p_n & \ell_n \end{pmatrix}$ (avec, pour tout n de $\mathbb{N}$, $p_n + \ell_n = 1$) l'état probabiliste après n années.

1. **a.** Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste et en déduire que ce graphe a pour matrice de transition $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.
   b. Calculer l'état probabiliste P_1 .
   c. Déterminer l'état stable du graphe.
   Que peut-on en conclure pour la population de cette ville ?
2. À l'aide de la relation $P_{n+1} = P_n \times \mathrm{M}$, démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$p_{n+1} = 0,7\,p_n + 0,2$$

3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = p_n - \dfrac{2}{3}$.
   a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,7.
   b. Exprimer u_n en fonction de n et démontrer que $p_n = -\dfrac{1}{6} \times 0,7^n + \dfrac{2}{3}$.
   c. Calculer la limite de la suite $\left(p_n\right)$ et retrouver le résultat de la question **1. c**.

12 Extrait de la session « Pondichéry », 3 avril 2006

Pendant la saison estivale, deux sociétés de transport maritime ont l'exclusivité de l'acheminement des touristes entre deux îles du Pacifique.
On admet que le nombre de touristes transportés pendant chaque saison est stable.
La société « Alizés » a établi une enquête statistique sur les années 2001 à 2005 afin de prévoir l'évolution de la capacité d'accueil de ses navires.
L'analyse des résultats a conduit au modèle suivant : d'une année sur l'autre, la société « Alizés », notée A, conserve 80 % de sa clientèle et récupère 15 % des clients de la société concurrente, notée B.

Pour tout entier naturel n, on note pour la saison $(2005+n)$:

- a_n la probabilité qu'un touriste ait choisi la société Alizés (A) ;
- b_n la probabilité qu'un touriste ait choisi l'autre société de transport (B) ;
- $P_n = (a_n \quad b_n)$, la matrice traduisant l'état probabiliste, avec $a_n + b_n = 1$.

Les résultats pour les probabilités seront arrondies à 10^{-4}.

1. **a.** Modéliser le changement de situation par un graphe probabiliste de sommets nommés A et B.

b. On note M la matrice de transition de ce graphe. Recopier et compléter sur la copie la matrice suivante :
$M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & \dots \\ 0{,}15 & \dots \end{pmatrix}$

2. En 2005, la société « Alizés » a transporté 45 % des touristes. On a donc $a_0 = 0{,}45$.

a. Calculer la probabilité qu'un touriste choisisse la société « Alizés » en 2006.

b. Déterminer la matrice P_2 et interpréter ces résultats.

3. Soit $P = (a \quad b)$ avec a et b deux réels positifs tels que $a+b=1$.

a. Déterminer a et b tels que $P = P \times M$.

b. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

c. Interpréter ce résultat.

4. On admet qu'en 2015, la probabilité qu'un touriste choisisse la société A est $\dfrac{3}{7}$.
On interroge quatre touristes choisis au hasard ; les choix des touristes sont indépendants les uns des autres.
Déterminer la probabilité qu'au moins un des quatre touristes choisisse la société « Alizés » pour ses vacances en 2015.

13 Extrait de la session « Amérique du Nord », 31 mai 2006

Dans une entreprise, lors d'un mouvement social, le personnel est amené à se prononcer chaque jour sur l'opportunité ou non du déclenchement d'une grève.
Le premier jour, 15 % du personnel souhaite le déclenchement d'une grève.

À partir de ce jour-là :

- parmi ceux qui souhaitent le déclenchement d'une grève un certain jour, 35 % changent d'avis le lendemain.
- parmi ceux qui ne souhaitent pas le déclenchement d'une grève un certain jour, 33 % changent d'avis le lendemain.

On note :

- g_n la probabilité qu'un membre du personnel souhaite le déclenchement d'une grève le jour n ;
- t_n la probabilité qu'un membre du personnel ne souhaite pas le déclenchement d'une grève le jour n ;
- $P_n = \begin{pmatrix} g_n & t_n \end{pmatrix}$, la matrice qui traduit l'état probabiliste au n-ième jour.

1. Déterminer l'état initial P_1 .

2. **a.** Tracer un graphe probabiliste traduisant les données de l'énoncé.

b. Donner la matrice de transition M associée à ce graphe.

3. Calculer le pourcentage de personnes favorables à la grève le 3e jour.

4. Soit $P = (x \quad y)$ l'état probabiliste stable. (On rappelle que $x + y = 1$).

a. Montrer que x et y vérifient l'équation $x = 0,65\,x + 0,33\,y$.

b. Déterminer x et y (on arrondira les résultats à 10^{-3} près).

c. Interpréter le résultat.

14 Extrait de la session « Centres étrangers », Juin 2006

Les questions 1. et 2. peuvent être traitées de façon indépendante.

1. Dans une région, on considère trois types de temps : beau, variable, pluvieux.
On sait que :

- s'il fait beau un jour donné, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est $\frac{1}{3}$ et la probabilité qu'il pleuve est $\frac{1}{6}$;
- si le temps est variable, la probabilité qu'il soit variable le lendemain est $\frac{1}{4}$ et la probabilité qu'il pleuve est $\frac{1}{2}$;
- s'il pleut, la probabilité qu'il pleuve le lendemain est $\frac{1}{4}$ et la probabilité qu'il fasse beau est $\frac{1}{2}$.

On note :

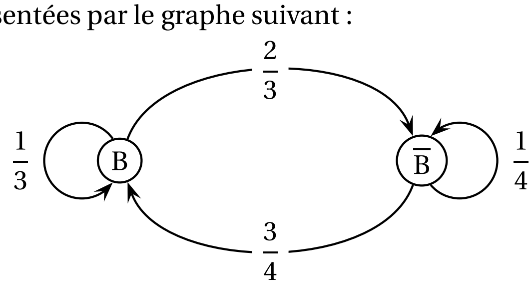
- B : « le temps est beau » ;
- V : « le temps est variable » ;
- P : « le temps est pluvieux ».

a. Représenter la situation par un graphe probabiliste.

b. Donner la matrice de transition de ce graphe. Les sommets B, V, P seront rangés dans cet ordre.

c. Pour tout entier naturel n, l'état probabiliste dans n jours est défini par la matrice ligne $P_n = \begin{pmatrix} b_n & v_n & p_n \end{pmatrix}$ où b_n désigne la probabilité qu'il fasse beau dans n jours, v_n la probabilité que le temps soit variable dans n jours et p_n la probabilité qu'il pleuve dans n jours.
Aujourd'hui il fait beau ; on a donc $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice ligne décrivant l'état initial.
Déterminer la probabilité de chaque type de temps dans 2 jours.

2. Dans une autre région, on note B : « il fait beau » $\overline{\text{B}}$: « il ne fait pas beau ».
Les variations du temps sont représentées par le graphe suivant :



a. Donner la matrice de transition T de ce graphe.

b. Soit $Q = (x\ y)$ avec $x + y = 1$.
Déterminer x et y tels que $Q = Q\,T$ et interpréter le résultat.

15 Extrait de la session « Métropole », 15 juin 2006

Dans une région de France supposée démographiquement stable, on compte 190 milliers d'habitants qui se déplacent en voiture pour aller travailler : les uns se déplacent seuls dans leur voiture, les autres pratiquent le co-voiturage.

On admet que :

- si une année un habitant pratique le co-voiturage, l'année suivante il se déplace seul dans sa voiture avec une probabilité égale à 0,6 ;
- si une année un habitant se déplace seul dans sa voiture, l'année suivante il pratique le co-voiturage avec une probabilité égale à 0,35.

Première partie

On note C l'état « pratiquer le co-voiturage » et V l'état « se déplacer seul dans sa voiture ».

1. Dessiner un graphe probabiliste de sommets C et V qui modélise la situation aléatoire décrite.
2. En considérant C et V dans cet ordre, en ligne, la matrice de transition associée à ce graphe est $M = \begin{pmatrix} 0,40 & 0,60 \\ 0,35 & 0,65 \end{pmatrix}$.
   Vérifier que l'état stable du système correspond à la matrice ligne $(70 \quad 120)$.
   En donner une interprétation.

Deuxième partie

En 2000, 60 milliers d'habitants pratiquaient le co-voiturage et 130 milliers d'habitants se déplaçaient seuls dans leur voiture.
On appelle X_n (n entier naturel) le nombre de milliers d'habitants qui pratiquent le co-voiturage durant l'année $2000 + n$. On a donc $X_0 = 60$.
On admet que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = 0,05\,X_n + 66,5$.
On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie pour tout entier naturel n par $U_n = X_n - 70$.

1. Prouver que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
   Préciser sa raison et son premier terme.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $X_n = 70 - 10 \times 0,05^n$.
   Est-il possible que, durant une année, le nombre d'habitants pratiquant le co-voiturage atteigne la moitié de la population de cette région ?

16 Extrait de la session « Antilles – Guyane », Septembre 2006

Sur une population donnée, abonnée à deux opérateurs téléphoniques A et B, on considère que, chaque année, 40 % des abonnés à l'opérateur A le quitte pour l'opérateur B et 10 % des abonnés à l'opérateur B le quitte pour l'opérateur A. On néglige les nouveaux abonnés.
On suppose de plus qu'en 2005, 25 % de cette population est abonnée à l'opérateur A.

Partie A

1. Déterminer le graphe probabiliste correspondant à cette situation.
   En déduire la matrice de transition, notée M.
2. On note :
   - a_n la part des abonnés à l'opérateur A l'année $2005+n$;
   - b_n la part des abonnés à l'opérateur B l'année $2005+n$;
   - E_n la matrice $(a_n \quad b_n)$, correspondant à l'état probabiliste l'année $2005+n$.

   a. Préciser E_0 .

   b. Calculer E_1 en faisant apparaître vos calculs.

   c. Déterminer la répartition prévisible de cette population en 2013.
   On pourra utiliser la calculatrice et on donnera le résultat sous forme décimale arrondie au centième.

   d. Soit E la matrice $(a \quad b)$ où a et b sont deux réels positifs tels que $a+b=1$.
   Déterminer a et b tels que $\mathrm{E} = \mathrm{E} \times \mathrm{M}$.
   Interpréter ce résultat.

Partie B

1. Montrer que $a_{n+1} = 0{,}5\,a_n + 0{,}1$.
2. On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = a_n - 0{,}2$.

   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   b. En déduire l'expression de u_n puis de a_n en fonction de n.

   c. Déterminer la limite de la suite (a_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
   Que retrouve-t-on ?

17 Extrait de la session « Polynésie », Septembre 2006

Une commune possède deux clubs de sport que l'on note A et B.
Le club A est installé depuis 1990, le club B a ouvert ses portes au cours de l'année 2004.
Au premier janvier 2005, on constate que 1 100 personnes sont abonnées au club A et 400 au club B.
Le prix de l'abonnement est moins coûteux au club A ; les activités proposées sont plus nombreuses au club B.
Aussi, chaque année, 14 % des abonnés au club A changent pour le club B et 6 % des abonnés au club B changent pour le club A.
On suppose que la population totale des abonnés reste constante et qu'une personne ne s'abonne jamais aux deux clubs en même temps.

On note a_n le nombre d'abonnés au club A et b_n le nombre d'abonnés au club B au premier janvier de l'année $2005+n$.
E_n désigne la matrice ligne $(a_n \;\; b_n)$; ainsi $E_0 = (a_0 \;\; b_0) = (1\,100 \;\; 400)$.

1. Traduire les données par un graphe probabiliste.
2. **a.** Écrire la matrice de transition M telle que $E_{n+1} = E_n \times M$.
   En déduire E_n en fonction de E_0, M et n. On ne demande pas de démontrer le résultat.

   b. Calculer M^2.
   En déduire le nombre d'abonnés aux deux clubs au premier janvier 2007.
3. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $a_{n+1} = 0{,}8 \times a_n + 90$.

   b. Pour n entier naturel, on pose : $u_n = a_n - 450$. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.

   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $a_{n+1} = 650 \times 0{,}8^n + 450$.

   d. Déterminer la limite de a_n quand n tend vers $+\infty$.
   Interpréter ce résultat pour les deux clubs sportifs.

18 Extrait de la session « Nouvelle-Calédonie », Novembre 2006

Une association sportive propose à ses adhérents de pratiquer au choix soit le karaté, soit le judo ; chaque adhérent pratique un et un seul de ces deux sports.
Chaque année les adhérents renouvellent tous leur adhésion. L'association n'accueille pas de nouveaux adhérents. Elle compte 800 adhérents.

Pour le renouvellement des adhésions, les données des années précédentes permettent d'envisager le modèle suivant :

- 70 % des adhérents qui étaient inscrits au karaté se réinscrivent au karaté,
- 20 % des adhérents qui étaient inscrits au judo s'inscrivent au karaté.

En 2003, 200 adhérents étaient inscrits dans la section karaté et 600 adhérents étaient inscrits dans la section judo.

On appelle $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice traduisant la répartition des adhérents selon le sport pratiqué l'année $2003 + n$:

- a_n représente la proportion des adhérents inscrits au karaté l'année $2003 + n$;
- b_n représente la proportion des adhérents inscrits au judo l'année $2003 + n$;
- $a_n + b_n = 1$.

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste.

2. Déterminer l'état initial $P_0 = \left(a_0 \quad b_0\right)$.

3. **a.** Déterminer la matrice de transition M associée au graphe.
(Rappel : M est la matrice telle que : $P_{n+1} = P_n \times M$.)

b. En admettant que, en 2005, 36,25 % des adhérents sont inscrits au karaté et 63,75 % des adhérents sont inscrits au judo, déterminer la répartition que le modèle envisagé permet de prévoir pour 2006. (Exprimer les résultats sous forme de pourcentages, puis donner les nombres d'adhérents correspondants.)

4. Soit $P = \left(x \quad y\right)$ Ia matrice correspondant à l'état stable, c'est à dire telle que $P \times M = P$.
(Rappel : x et y sont des nombres réels tels que $x + y = 1$.)

a. Déterminer les nombres x et y.

b. En déduire la limite de a_n quand n tend vers l'infini.
Interpréter ce résultat.

5. Dans la même ville, un club de judo accepte de nouveaux adhérents : chaque année le nombre de ses adhérents augmente de 10 %.
Le club comptait 405 adhérents en 2003.
En utilisant une calculatrice, trouver en quelle année l'effectif de ce club sera pour la première fois supérieur à l'effectif de la section judo de l'association étudiée dans les questions précédentes ?

19 Extrait de la session « Nouvelle Calédonie », Mars 2007

Deux joueurs A et B, amateurs de tennis, décident de jouer une partie toutes les semaines.

- La probabilité que A gagne la partie de la première semaine est 0,7.
- Si A gagne la partie de la semaine n, il garde la même stratégie de jeu la semaine suivante, et la probabilité qu'il gagne alors la partie de la semaine $(n+1)$ est seulement de 0,4.
- Si A perd la partie de la semaine n, il change de stratégie de jeu pour la semaine suivante, et alors, la probabilité qu'il gagne la partie de la semaine $(n+1)$ est de 0,9.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on désigne par A_n l'évènement : « A gagne la partie de la n-ième semaine », par B_n l'évènement : « B gagne la partie de la n-ième semaine », et on note $a_n = p\left(\mathrm{A}_n\right)$.
Le but de cet exercice est de rechercher la limite de la suite (a_n), en utilisant deux méthodes différentes.

Première méthode : graphe probabiliste

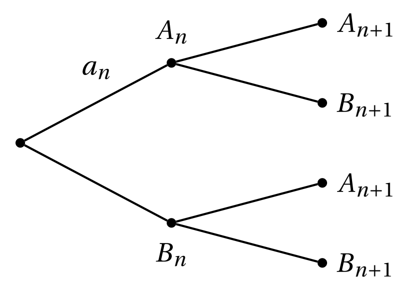
Pour tout entier naturel n non nul, on désigne par $P_n = \begin{pmatrix} a_n & 1-a_n \end{pmatrix}$ la matrice des probabilités associée à la n-ième semaine.

1. Décrire cette situation à l'aide d'un graphe probabiliste, et donner la matrice M de transition associée à ce graphe.
2. On donne $M^2 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,45 & 0,55 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \\ 0,675 & 0,325 \end{pmatrix}$.
Quelle est la probabilité pour que A gagne la partie de la 4$^{\text{e}}$ semaine ?
3. Déterminer la matrice ligne $P = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix}$ telle que $P \times M = P$.
4. En déduire la limite de la suite (a_n) et interpréter le résultat obtenu.

Deuxième méthode : probabilité et suites

Dans cette deuxième partie, on ne tient pas compte de résultats démontrés dans la partie précédente.

1. **a.** Recopier sur votre copie l'arbre ci-dessous, et compléter l'arbre avec les 5 probabilités manquantes.

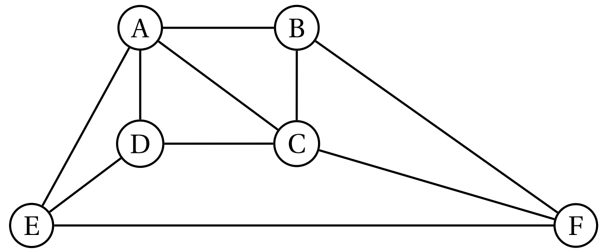


   b. Justifier que $a_{n+1} = 0,9 - 0,5\,a_n$ pour tout entier n supérieur ou égal à 1.
2. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par : $u_n = a_n - 0,6$.
   a. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique de raison $(-0,5)$.
   b. En déduire l'expression de a_n en fonction de n, puis la limite de la suite (a_n).

20 Extrait de la session « Métropole – La Réunion », Septembre 2007

Partie I

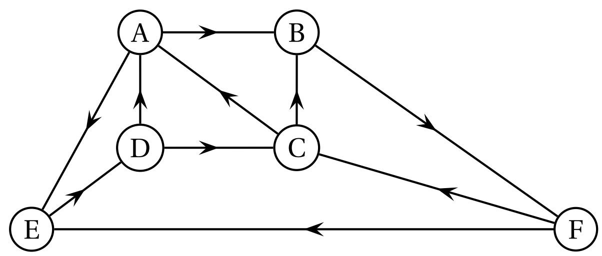
Le graphe suivant représente le plan d'une ville. Les arêtes du graphe représentent ses avenues commerçantes et les sommets du graphe les carrefours de ces avenues.



1. Donner l'ordre de ce graphe, puis le degré de chacun de ses sommets.
2. Un piéton peut-il parcourir toutes ces avenues sans emprunter plusieurs fois la même avenue ? Justifier votre réponse.

Partie II

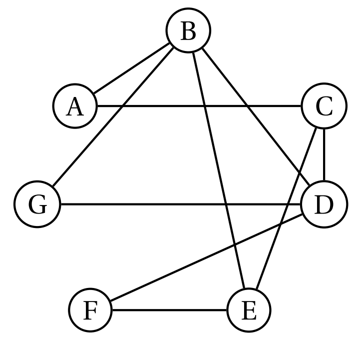
Dans le graphe suivant, on a indiqué le sens de circulation dans les différentes avenues.



1. Écrire la matrice M associée à ce graphe.
   (On rangera les sommets dans l'ordre alphabétique).
2. **a.** Quel est le nombre de trajets de longueur 2 reliant D à B ?
   b. Comment pourrait-on obtenir ce résultat uniquement par le calcul à partir de la matrice M ?

21 Extrait de la session « Nouvelle-Calédonie », Novembre 2007

Sur le graphe ci-contre, les sept sommets A, B, C, D, E, F et G correspondent à sept villes.
Une arête reliant deux de ces sommets indique l'existence d'une liaison entre les deux villes correspondantes.



Les questions 1, 2 *et* 3 *sont indépendantes.*

1. Est-il possible de trouver un trajet, utilisant les liaisons existantes, qui part d'une des sept villes et y revient en passant une fois et une seule fois par toutes les autres villes ?

2. On note M la matrice associée au graphe ci-dessus. Les sommets sont rangés suivant l'ordre alphabétique.

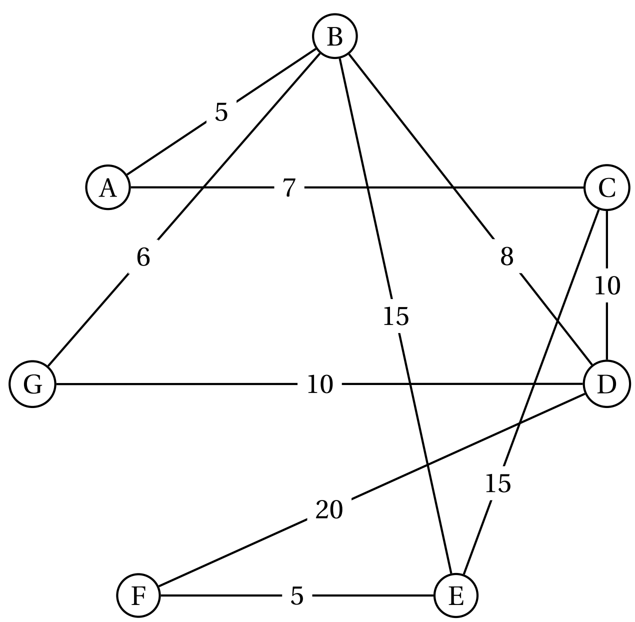
On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 6 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 1 & 10 & 9 & 1 & 5 \\ 6 & 1 & 0 & 9 & 8 & 0 & 3 \\ 1 & 10 & 9 & 2 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 9 & 8 & 1 & 0 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 7 & 6 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 5 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Donner le nombre de chemins de longueur 3 qui relient le sommet A au sommet F.

Les citer tous. Aucune justification n'est demandée.

3. On donne ci-dessous et sur le graphe ci-contre les distances exprimées en centaines de kilomètres entre deux villes pour lesquelles il existe une liaison.

Un représentant de commerce souhaite aller de la ville A à la ville F.



En expliquant la méthode utilisée, déterminer le trajet qu'il doit suivre pour que la distance parcourue soit la plus courte possible et donner cette distance.

22 Extrait de la session « Amérique du Nord », 29 mai 2008

Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I (calculs exacts demandés)

Sur une route, deux intersections successives, "a" et "b" sont munies de feux tricolores. On suppose que ces feux ne sont pas synchronisés et fonctionnent de manière indépendante.

On admet que :

- la probabilité que le feu de "a" soit vert est égale à $\dfrac{3}{4}$;
- la probabilité que le feu de "b" soit vert est égale à $\dfrac{1}{2}$.

On note A l'évènement : « le feu de "a" est vert », B l'évènement « le feu de "b" est vert ».
Un automobiliste passe successivement aux deux intersections "a" et "b".

1. Calculer la probabilité qu'à son passage, les deux feux soient verts.
2. Calculer la probabilité qu'à son passage, il rencontre au moins un feu vert.

Partie II (résultats demandés à 10^{-2} près)

Pour se rendre à son travail, Mathurin rencontre une succession d'intersections de feux tricolores dont le fonctionnement est décrit ci-dessous.

À chaque intersection :

- si le feu est vert, il le sera à l'intersection suivante avec la probabilité 0,9 ou sera rouge avec la probabilité 0,05 ;
- si le feu est orange, il le sera à l'intersection suivante avec la probabilité 0,1 ou sera vert avec la probabilité 0,8 ;
- si le feu est rouge, il le sera à l'intersection suivante avec la probabilité 0,5 ou sera orange avec la probabilité 0,05.

n étant un entier naturel non nul, on note :

- V_n la probabilité que Mathurin rencontre un feu vert à la n-ième intersection ;
- O_n la probabilité que Mathurin rencontre un feu orange a la n-ième intersection ;
- R_n la probabilité que Mathurin rencontre un feu rouge à la n-ième intersection ;
- $P_n = \begin{pmatrix} V_n & O_n & R_n \end{pmatrix}$ la matrice traduisant l'état probabiliste du n-ième feu tricolore.

1. **a.** Construire un graphe probabiliste pour décrire cette situation.

   b. Donner la matrice de transition M complétée de ce graphe :

$$M = \begin{pmatrix} \dots & 0{,}05 & 0{,}05 \\ 0{,}8 & \dots & 0{,}1 \\ 0{,}45 & \dots & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

2. **a.** Si le premier feu rencontré est vert, donner la matrice P_1 de l'état initial puis calculer P_2.

   b. On donne $P_3 = (0{,}87 \quad 0{,}05 \quad 0{,}08)$.
   Quelle est la probabilité que le quatrième feu soit vert ?
3. Si le premier feu rencontré est rouge, donner la matrice P_1 de l'état initial puis calculer P_2.
4. On remarque que, quelle que soit la couleur du premier feu rencontré, on obtient à partir d'un certain rang n :
   $P_n = (0{,}85 \quad 0{,}05 \quad 0{,}10)$.
   Donner une interprétation concrète de ce résultat.

23 Extrait de la session « Antilles – Guyane », Juin 2008

Un ciné-club qui projette des films français et étrangers dispose de deux salles. Les abonnés au ciné-club assistent systématiquement à une projection chaque lundi soir.

- La probabilité qu'un spectateur ayant vu un film français à une séance retourne voir un film français à la séance suivante est égale à 0,6.
- La probabilité qu'un spectateur ayant vu un film étranger à une séance aille voir un film français à la séance suivante est égale à 0,75.

Un lundi soir, un film français est projeté dans chacune des deux salles. Puis les semaines suivantes, le ciné-club propose dans une salle un film français et dans l'autre un film étranger.
On cherche à étudier l'évolution de la répartition des spectateurs entre les deux salles au cours des semaines suivantes, à partir de ce lundi.
On note A l'état « le spectateur voit un film français ».
On note B l'état « le spectateur voit un film étranger ».

1. **a.** Représenter la situation ci-dessus par un graphe probabiliste.

b. On note M la matrice de transition de ce graphe en considérant les états dans l'ordre alphabétique. Justifier que $M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,75 & 0,25 \end{pmatrix}$

2. On considère les évènements A_n « le spectateur voit un film français à la n-ième séance » et B_n « le spectateur voit un film étranger à la n-ième séance ».

L'état probabiliste de la répartition des abonnés dans les deux salles lors de la n-ième séance est donné par la matrice ligne $T_n = (a_n \quad b_n)$ où $a_n = P(\text{A}_n)$, $b_n = P(\text{B}_n)$ et $a_n + b_n = 1$.

L'état probabiliste initial est donc donné par $T_1 = (1 \quad 0)$.

Déterminer les matrices T_2 et T_3.

En donner une interprétation en termes de répartition des abonnés dans les deux salles.

3. Déterminer la valeur arrondie au centième des réels x et y définissant l'état limite $T = (x \quad y)$ vers lequel converge la suite (T_n).

Interpréter le résultat.

24 Extrait de la session « Métropole », 19 juin 2008

Deux fabricants de parfum lancent simultanément leur nouveau produit qu'ils nomment respectivement Aurore et Boréale.
Afin de promouvoir celui-ci, chacun organise une campagne de publicité.
L'un d'eux contrôle l'efficacité de sa campagne par des sondages hebdomadaires.
Chaque semaine, il interroge les mêmes personnes qui toutes se prononcent en faveur de l'un de ces deux produits.

Au début de la campagne, 20 % des personnes interrogées préfèrent Aurore et les autres préfèrent Boréale. Les arguments publicitaires font évoluer cette répartition : 10 % des personnes préférant Aurore et 15 % des personnes préférant Boréale changent d'avis d'une semaine sur l'autre.

La semaine du début de la campagne est notée semaine 0.
Pour tout entier naturel n, l'état probabiliste de la semaine n est défini par la matrice ligne $P_n = (a_n \quad b_n)$, où a_n désigne la probabilité qu'une personne interrogée au hasard préfère Aurore la semaine n et b_n la probabilité que cette personne préfère Boréale la semaine n.

1. Déterminer la matrice ligne P_0 de l'état probabiliste initial.
2. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B, A pour Aurore et B pour Boréale.
3. **a.** Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

   b. Montrer que la matrice ligne P_1 est égale à $(0{,}3 \quad 0{,}7)$.
4. **a.** Exprimer, pour tout entier naturel n, P_n en fonction de P_0 et de n.

   b. En déduire la matrice ligne P_3 .
   Interpréter ce résultat.
5. *Dans la question suivante, toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soit $P = (a \quad b)$ la matrice ligne de l'état probabiliste stable.

   a. Déterminer a et b.

   b. Le parfum Aurore finira-t-il par être préféré au parfum Boréale ? Justifier.

25 Extrait de la session « La Réunion », Juin 2008

Les joueurs d'un club de football sont partagés en deux équipes : une équipe A et une équipe B.
L'entraîneur change la composition de ces équipes après chacun des matchs, suivant les performances des joueurs.

Une étude statistique menée au cours des saisons précédentes permet d'estimer que :

- si un joueur fait partie de l'équipe A, la probabilité qu'il reste dans cette équipe pour le match suivant est 0,6 ;
- si un joueur fait partie de l'équipe B, la probabilité qu'il change d'équipe le match suivant est 0,2.

1. Représenter les données précédentes par un graphe probabiliste G de sommets A et B et donner sa matrice de transition.

2. Pour un entier naturel n donné, on note $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice ligne décrivant l'état probabiliste lors du match n.

Paul vient d'arriver dans le club et la probabilité a_0 qu'il joue dans l'équipe A pour le match de préparation (match 0) est 0,1.

L'état probabiliste initial est donc $P_0 = (0{,}1 \quad 0{,}9)$.

a. Vérifier que $P_1 = (0{,}24 \quad 0{,}76)$ et calculer P_2 .

b. Quelle est la probabilité que Paul joue dans l'équipe A lors du deuxième match de championnat (match 2) ? (On donnera la valeur approchée du résultat arrondie à 10^{-2} près.)

3. On admet que, pour tout entier naturel n : $a_{n+1} = 0{,}4\,a_n + 0{,}2$

On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = a_n - \dfrac{1}{3}$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,4 et de premier terme $v_0 = -\dfrac{7}{30}$.

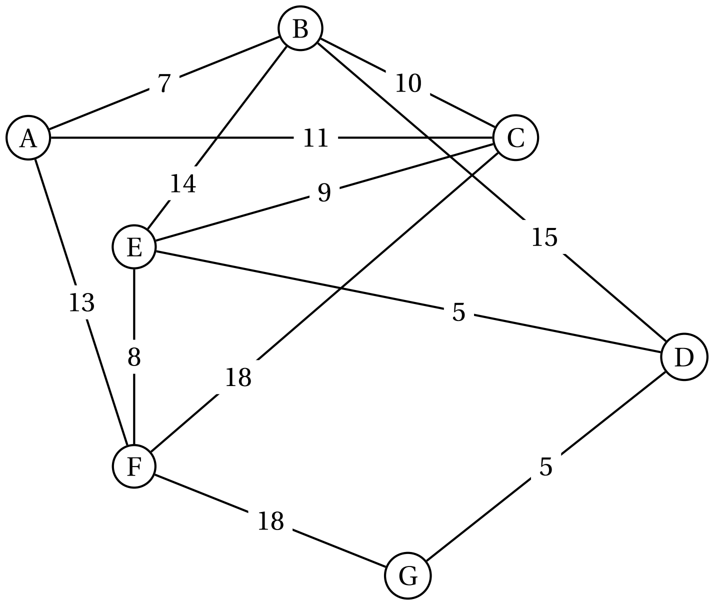
b. Exprimer v_n en fonction de n et en déduire que, pour tout entier naturel n :

$$a_n = \frac{1}{3}\left(1 - 0{,}7 \times 0{,}4^n\right)$$

c. Déduire de ce qui précède la limite de la suite (a_n).
Quel est l'état stable du graphe G ?

26 Extrait de la session « Polynésie », Juin 2008

Une grande ville a mis en place un système de location de bicyclettes en libre service. Un abonné peut ainsi louer une bicyclette dans une station puis la déposer dans n'importe quelle station de son choix.
La ville comporte sept stations de location nommées A, B, C, D, E, F et G.
Les stations sont reliées entre elles par une piste cyclable et les temps de parcours en minutes sont indiqués sur le graphe ci-contre.



1. Philippe, cycliste très prudent, décide de visiter cette ville en n'empruntant que des pistes cyclables.
   A-t-il la possibilité d'effectuer un parcours empruntant une fois et une seule toutes les pistes cyclables ? Justifier la réponse.
   À la fin de ce parcours, pourra-t-il rendre sa bicyclette dans la station de départ ? Justifier la réponse.
2. On appelle M la matrice associée à ce graphe. on donne deux matrices N et T :

$$N = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 8 & 5 & 5 & 9 & 2 \\ 9 & 6 & 10 & 7 & 10 & 6 & 4 \\ 8 & 10 & 8 & 5 & 10 & 9 & 4 \\ 5 & 7 & 5 & 2 & 8 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & 10 & 8 & 6 & 11 & 2 \\ 9 & 6 & 9 & 4 & 11 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 8 & 4 & 5 & 9 & 1 \\ 9 & 6 & 10 & 6 & 10 & 6 & 4 \\ 8 & 10 & 8 & 4 & 10 & 9 & 4 \\ 5 & 7 & 5 & 2 & 8 & 4 & 5 \\ 5 & 8 & 10 & 8 & 6 & 11 & 0 \\ 9 & 6 & 9 & 4 & 11 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 5 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

   a. Une des deux matrices N ou T est la matrice M^3.
   Sans calcul, indiquer quelle est la matrice M^3. Justifier la réponse.

   b. Philippe a loué une bicyclette à la station F et l'a rendue à la station E. Au cours de son déplacement, il est passé exactement deux fois devant une station.
   Combien de trajets différents a-t-il pu suivre ? Expliquer.

3. Le lendemain, il envisage de rejoindre le plus rapidement possible la station G en partant de la station A.
   À l'aide d'un algorithme, déterminer un tel parcours et donner le temps nécessaire pour l'effectuer.

27 Extrait de la session « Métropole – La Réunion », Septembre 2008

Dans le cadre de la restructuration de son entreprise, afin de garantir la stabilité du nombre d'emplois, le directeur souhaite qu'à long terme plus de 82 % de ses employés ne travaillent que le matin.

Pour cela, il décide que désormais :

- 20 % des employés travaillant le matin une semaine donnée travaillent l'après-midi la semaine suivante ;
- 5 % des employés travaillant l'après-midi une semaine donnée travaillent aussi l'après-midi la semaine suivante.

On note A : « L'employé travaille le matin » et B : « L'employé travaille l'après-midi ».

1. **a.** Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.

   b. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

2. La semaine notée 0, semaine de la décision, 60 % des employés travaillent le matin et les autres l'après-midi.

   a. Donner la matrice ligne notée P_0 décrivant l'état initial des employés dans cette entreprise.

   b. Calculer la probabilité qu'un employé travaille le matin lors de la semaine 2, deuxième semaine après la prise de décision,

3. Soit $P = (x \quad y)$ l'état probabiliste stable.

   a. Démontrer que x et y vérifient l'égalité $x = 0,8\,x + 0,95\,y$.

   b. Déterminer x et y.

   c. Le souhait du directeur de cette entreprise est-il réalisable ? Justifier la réponse.

4. On admet qu'un an après cette décision la probabilité qu'un employé travaille le matin est égale à $\dfrac{19}{23}$.

   On choisit alors quatre employés au hasard.

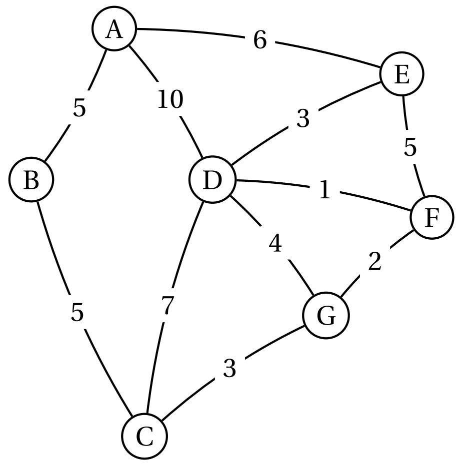
   Le grand nombre d'employés de l'entreprise permet d'assimiler ces choix à des tirages successifs indépendants avec remise.

   Déterminer la probabilité qu'au moins un des quatre employés travaille l'après-midi et donner sa valeur décimale arrondie au millième.

28 Extrait de la session « Amérique du Sud », Novembre 2008

Partie A

Laurent s'occupe de distribuer le courrier dans les bureaux d'une grande entreprise.
Le graphe ci-dessous représente les différents parcours qu'il peut faire pour distribuer le courrier dans les bureaux A, B, C, D, E, F et G.
Le poids de chaque arête indique le nombre d'obstacles (portes, escaliers, machines à café...) qui nuisent à la distribution du courrier.



Laurent se voit confier par le bureau A un colis à livrer au bureau G.
Indiquer un parcours qui permette à Laurent de partir du bureau A pour arriver au bureau G en rencontrant le minimum d'obstacles.

Partie B

Pris par le temps, il n'est pas rare de voir Laurent oublier de livrer le courrier du matin !
On considère que :

- si Laurent a distribué le courrier du matin un certain jour, la probabilité qu'il y pense le lendemain est de 0,7 ;
- si Laurent a oublié de distribuer le courrier du matin un certain jour, la probabilité pour qu'il oublie à nouveau le lendemain est de 0,8.

Le lundi matin 1er octobre, Laurent a bien distribué le courrier.
On note a_n la probabilité que Laurent distribue le courrier le n-ième jour de travail (on considère donc que le lundi 1er octobre est le premier jour et que $a_1 = 1$).

1. Traduire les données de cet exercice à l'aide d'un graphe probabiliste.
Préciser la matrice de transition associée à ce graphe.

2. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$a_{n+1} = 0{,}5\, a_n + 0{,}2$$

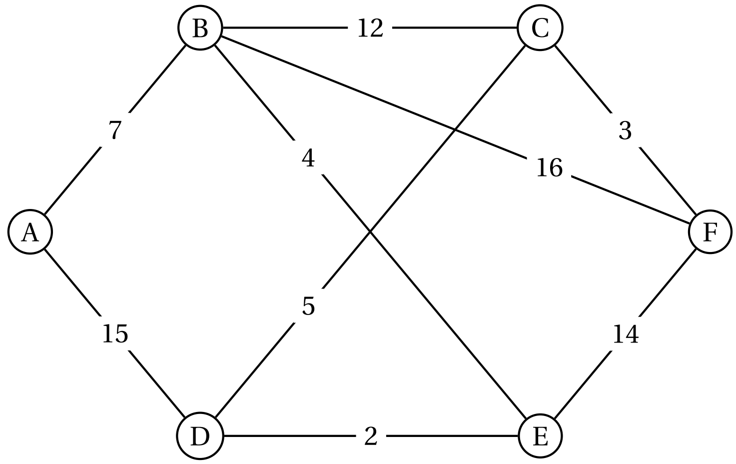
3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \geqslant 1$, par $u_n = a_n - 0{,}4$.

   a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5.
   Calculer son premier terme.

   b. En déduire, pour tout $n \geqslant 1$, la valeur de a_n en fonction de n.

29 Extrait de la session « Pondichéry », 16 avril 2009

Une agence de voyages organise différentes excursions dans une région du monde et propose la visite de sites incontournables, nommés A, B, C, D, E et F.
Ces excursions sont résumées sur le graphe ci-dessous dont les sommets désignent les sites, les arêtes représentent les routes pouvant être empruntées pour relier deux sites et le poids des arêtes désigne le temps de transport (en heures) entre chaque site.



1. Justifier que ce graphe est connexe.
2. Un touriste désire aller du site A au site F en limitant au maximum les temps de transport.
   - **a.** En utilisant un algorithme, déterminer la plus courte chaîne reliant le sommet A au sommet F.
   - **b.** En déduire le temps de transport minimal pour aller du site A au site F.
3. Un touriste désirant apprécier un maximum de paysages souhaite suivre un parcours empruntant toutes les routes proposées une et une seule fois.
   Si ce parcours existe, le décrire sans justifier ; dans le cas contraire, justifier qu'un tel parcours n'existe pas.

30 Extrait de la session « Asie », 16 juin 2009

Un enfant joue aux fléchettes.
Un adulte observe son jeu et remarque que si l'enfant atteint la cible lors d'un lancer, alors il atteint encore la cible au lancer suivant avec une probabilité égale à $\frac{3}{4}$.
Si l'enfant n'atteint pas la cible lors d'un lancer, alors il atteint la cible au lancer suivant avec une probabilité égale à $\frac{1}{8}$.

Lors du premier lancer, l'enfant atteint la cible avec une probabilité égale à $\frac{1}{10}$.

1. On note C l'état « l'enfant atteint la cible » et on note R l'état « l'enfant n'atteint pas la cible ».

   a. Représenter la situation par un graphe probabiliste.

   b. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en considérant les états dans l'ordre alphabétique.

2. On désigne par n un nombre entier naturel non nul.
On considère l'évènement C_n : « l'enfant atteint la cible au n-ième lancer » et l'évènement R_n : « l'enfant n'atteint pas la cible au n-ième lancer ».
L'état probabiliste lors du n-ième lancer est donné par la matrice ligne $E_n = (c_n \quad r_n)$ où c_n désigne la probabilité de l'évènement C_n et r_n la probabilité de l'évènement R_n.

   a. Écrire la matrice ligne E_1 de l'état probabiliste initial.

   b. Déterminer la matrice ligne E_3 et donner une interprétation du résultat obtenu.

3. Soit $E = (c \quad r)$ la matrice ligne de l'état probabiliste stable.

   a. Déterminer c et r.

   b. L'adulte affirme qu'après un très grand nombre de lancers, l'enfant a deux fois plus de chance de manquer la cible que de l'atteindre.
   Cette affirmation est-elle justifiée ?

31 Extrait de la session « Centres étrangers », 15 juin 2009

Chaque mois, un institut de sondage donne la cote de popularité d'un même groupe politique dans l'opinion publique. Les personnes sondées sont, soit favorables, soit défavorables à ce groupe. Initialement, il y a autant de personnes favorables à ce groupe politique que de personnes qui lui sont défavorables. De chaque mois au mois suivant, on considère que :

- 10 % des personnes qui étaient favorables à ce groupe politique ne le sont plus.
- 15 % des personnes qui n'étaient pas favorables à ce groupe politique le deviennent.

On note, pour tout entier naturel n,

- a_n la probabilité qu'une personne interrogée au hasard au bout de n mois soit favorable à ce groupe politique ;
- b_n la probabilité qu'une personne interrogée au hasard au bout de n mois ne soit pas favorable à ce groupe politique ;
- $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice traduisant l'état probabiliste au bout de n mois.

On note M la matrice de transition telle que, pour tout entier naturel n : $P_{n+1} = P_n \times M$.

Première partie

1. Déterminer la matrice P_0 donnant l'état probabiliste initial.
2. Déterminer le graphe probabiliste correspondant à la situation.
3. On admet que $M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}85 \end{pmatrix}$.
   Déterminer la matrice P_2 en détaillant les calculs (on donnera les coefficients sous forme décimale arrondie au centième).
4. Déterminer l'état stable et interpréter ce résultat.

Deuxième partie

1. Montrer que $a_{n+1} = 0{,}75\, a_n + 0{,}15$ pour tout entier naturel n.
2. On considère la suite (u_n) telle que $u_n = a_n - 0{,}6$ pour tout entier naturel n.
   a. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique de raison 0,75.
   b. En déduire que $a_n = -0{,}1 \times (0{,}75)^n + 0{,}6$ pour tout entier naturel n.
   c. Calculer la limite de a_n quand n tend vers $+\infty$.
   Comment peut-on interpréter cette limite ?
   En quoi ce résultat est-il cohérent avec celui demandé à la question **4.** de la première partie ?

32 Extrait de la session « Antilles – Guyane », Septembre 2009

Partie A

Dans une résidence de vacances d'été, les touristes vont tous les jours à la plage. Ils disposent pour se déplacer de deux moyens de locomotion : un minibus ou des bicyclettes. Le séjour dure un mois pour tous les vacanciers.
Chaque jour, ils peuvent modifier leur choix de transport. Le premier jour, 80 % des touristes choisissent le minibus.
On considère qu'ensuite, chaque jour, 30 % de ceux qui ont pris le minibus la veille choisissent la bicyclette et 15 % des vacanciers qui avaient emprunté la bicyclette la veille, choisissent le minibus.

Soit n est un entier entre 1 et 31.
On appelle $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice traduisant l'état probabiliste relatif au n-ième jour, où :

- a_n représente la proportion des vacanciers choisissant le minibus le jour n ;
- b_n représente la proportion des vacanciers choisissant la bicyclette le jour n.

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste.
2. Écrire la matrice de transition, notée M, associée à cette situation.
3. Déterminer l'état initial P_1 .
4. **a.** Calculer P_2 (faire apparaître les calculs).
   Interpréter le résultat obtenu.

   b. On suppose que $M^5 = \begin{pmatrix} 0,367 & 0,633 \\ 0,317 & 0,683 \end{pmatrix}$ et $M^6 = \begin{pmatrix} 0,352 & 0,648 \\ 0,324 & 0,676 \end{pmatrix}$, les coefficients ayant été arrondis au millième.
   En utilisant la matrice qui convient, déterminer la répartition prévisible le 6$^{\text{e}}$ jour. On donnera le résultat en pourcentage arrondi à 1 % près.
5. Soit $P = (x \quad y)$ la matrice correspondant à l'état stable.
   Déterminer x et y ; en donner une interprétation.
6. Montrer que pour n entier compris entre 1 et 30 on a : $a_{n+1} = 0,55\,a_n + 0,15$.

Partie B

Pour n entier, $n \geqslant 1$, on définit la suite (u_n) par :

$$u_{n+1} = 0,55\,u_n + 0,15 \quad \text{et} \quad u_1 = 0,8$$

1. On pose $U_n = u_n - \dfrac{1}{3}$.
   Montrer que la suite (U_n) est géométrique. On précisera la raison et le premier terme de cette suite.
2. Exprimer U_n puis u_n en fonction de n.
3. En déduire la limite de la suite (u_n).
   Quel résultat retrouve-t-on ?

33 Extrait de la session « Polynésie », Septembre 2009

On considère une population donnée d'une île de Bretagne se rendant régulièrement sur le continent. Deux compagnies maritimes A et B effectuent la traversée.
En 2008, 60 % de la population voyage avec la compagnie A.
Les campagnes publicitaires font évoluer cette répartition. Une enquête indique alors que chaque année 20 % des clients de la compagnie A l'abandonnent au profit de la compagnie B et que 10 % des clients de la compagnie B choisissent la compagnie A.

Pour tout entier naturel n, l'état probabiliste de l'année $2008+n$ est défini par la matrice ligne $\begin{pmatrix} x_n & y_n \end{pmatrix}$ où x_n désigne la proportion de la population qui voyage avec la compagnie A et y_n la proportion de la population qui voyage avec la compagnie B.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
2. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en prenant les sommets A et B dans cet ordre.
3. Préciser l'état initial P_0 puis montrer que $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}52 & 0{,}48 \end{pmatrix}$.
4. Déterminer la répartition prévisible du trafic entre les compagnies A et B en 2011.
5. Déterminer l'état stable et l'interpréter.
6. Montrer que, pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = 0{,}7\,x_n + 0{,}1$.
7. On admet que, pour tout entier naturel n, $x_n = \dfrac{4}{15} \times 0{,}7^n + \dfrac{1}{3}$.
   Déterminer la limite de la suite (x_n) et l'interpréter.

34 Extrait de la session « Nouvelle-Calédonie », Novembre 2009

Par suite d'une forte augmentation du prix des carburants de 2007 à 2008, certains salariés d'une entreprise changent de mode de déplacement pour se rendre sur leur lieu de travail.
En 2007, 60 % des salariés utilisaient leur voiture personnelle.
En 2008, 30 % des salariés utilisant leur voiture en 2007 ne l'utilisent plus et 5 % des personnes ne l'utilisant pas en 2007 l'utilisent en 2008.

On appelle A l'état « la personne utilise sa voiture » et B l'état « la personne n'utilise pas sa voiture ».

On suppose que cette évolution se poursuit d'une année à l'autre à partir de 2008 et on appelle, pour tout entier naturel n, P_n la matrice ligne donnant l'état probabiliste des moyens de déplacement des salariés de cette entreprise au cours de l'année $(2007 + n)$.
On pose $P_n = (a_n \;\; b_n)$ et on a $P_0 = (0{,}6 \;\; 0{,}4)$.

1. Tracer un graphe probabiliste représentant la situation décrite ci-dessus.
2. Donner la matrice de transition correspondant à ce graphe probabiliste, en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
3. En supposant que cette évolution se poursuive et en utilisant la question précédente, quelle est la probabilité qu'un salarié de cette entreprise utilise sa voiture personnelle en 2009 ? En 2010 ? (On arrondira les résultats obtenus au centième).
4. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel n, on a la relation : $a_{n+1} = 0{,}7\,a_n + 0{,}05\,b_n$.
   En déduire que $a_{n+1} = 0{,}65\,a_n + 0{,}05$.

   b. On admet que a_n peut alors s'écrire, pour tout entier naturel n, $a_n = \dfrac{1}{7} + \dfrac{16}{35} \times 0{,}65^n$.
   Vérifier la validité de cette formule pour a_0, a_1 et a_2.
5. **a.** Déterminer la limite de la suite (a_n).

   b. En supposant que cette évolution se poursuive, est-il possible d'envisager qu'à terme aucun des salariés de cette entreprise n'utilise sa voiture personnelle pour aller au travail ? Justifier la réponse.

35 Extrait de la session « Liban », 31 mai 2010

Deux chaînes de télévision A et B programment chaque semaine, à la même heure, deux émissions concurrentes. On suppose que le nombre global de téléspectateurs de ces émissions reste constant.
La première semaine, 70 % de ces téléspectateurs ont regardé la chaîne A.

Une étude statistique montre que :
15 % des téléspectateurs qui ont regardé la chaîne A une semaine, regardent la chaîne B la semaine suivante.
10 % des téléspectateurs qui ont regardé la chaîne B une semaine, regardent la chaîne A la semaine suivante. On note respectivement a_n et b_n les proportions de téléspectateurs des chaînes A et B la n-ième semaine et P_n la matrice ligne $(a_n \quad b_n)$. On a donc $P_1 = (0{,}7 \quad 0{,}3)$.

1. **a.** Déterminer le graphe probabiliste représentant la situation.
   b. Donner la matrice de transition M associée à ce graphe.
2. Calculer M^3 à l'aide de la calculatrice, donner les résultats en arrondissant à 10^{-3} près.
   Quelle est la répartition des téléspectateurs entre les deux chaînes lors de la quatrième semaine ?
3. On considère la matrice ligne $P = (a \quad b)$, où a et b sont deux réels tels que $a + b = 1$.
   a. Déterminer a et b pour que $P = PM$.
   b. Interpréter les deux valeurs trouvées.
4. On admet que pour tout entier naturel $n > 0$, on a : $a_n = 0{,}4 + 0{,}3 \times \left(0{,}75^{n-1}\right)$
   a. Résoudre l'inéquation $a_n < 0{,}5$.
   b. À partir de quelle semaine l'audience de l'émission de la chaîne B dépassera-t-elle celle de l'émission de la chaîne A ?

36 Extrait de la session « Amérique du Nord », 3 Juin 2010

Pendant ses vacances d'été, Alex a la possibilité d'aller se baigner tous les jours. S'il va se baigner un jour, la probabilité qu'il aille se baigner le lendemain est de 0,7.
S'il ne va pas se baigner un jour, la probabilité qu'il aille se baigner le lendemain est de 0,9. Le premier jour de ses vacances, Alex va se baigner.

n étant un entier naturel non nul, on note :

- a_n la probabilité qu'Alex n'aille pas se baigner le n-ième jour.
- b_n la probabilité qu'Alex aille se baigner le n-ième jour.
- $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste le n-ième jour.

On a donc $P_1 = (0 \quad 1)$.

1. **a.** Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B (B représentant l'état « Alex va se baigner »).

   b. Soit M la matrice de transition associée à ce graphe.

   Recopier et compléter : $M = \begin{pmatrix} 0,1 & \dots \\ \dots & 0,7 \end{pmatrix}$

2. Calculer P_3, P_{10} et P_{20}.
   Quelle conjecture peut-on faire ?
3. **a.** Montrer que pour tout entier n non nul, $b_{n+1} = 0,9\,a_n + 0,7b_n$.

   b. En déduire que : $b_{n+1} = -0,2\,b_n + 0,9$.
4. On considère la suite u définie pour tout entier n non nul par $u_n = b_n - 0,75$.

   a. Montrer que u est une suite géométrique de raison $-0,2$; on précisera son premier terme.

   b. Déterminer la limite de la suite u.

   c. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n$.
5. On suppose dans cette question que le premier jour de ses vacances, Alex ne va pas se baigner.
   Quelle est la probabilité qu'il aille se baigner le 20^{e} jour de ses vacances ?

37 Extrait de la session « Antilles – Guyane », Juin 2010

M. et M[me] Martin, qui habitent une grand ville, aiment beaucoup voyager.
Ils prévoient toujours de partir pendant l'été, soit à l'étranger, soit de visiter une région en France.
S'ils sont restés en France une année donnée, la probabilité qu'ils partent à l'étranger l'année suivante est de 0,4.
Par contre, s'ils sont partis à l'étranger une année donnée, la probabilité qu'ils retournent à l'étranger l'années suivante est de 0,7.
En été 2009, ce couple est parti à l'étranger.

Pour tout entier naturel n, on note P_n la matrice ligne $(a_n \quad b_n)$ traduisant l'état probabiliste l'année $(2009+n)$, où a_n désigne la probabilité que ce couple soit resté en France l'année $(2009+n)$ et b_n la probabilité que ce couple soit parti à l'étranger l'année $(2009+n)$.

Partie A

1. **a.** Traduire les données par un graphe probabiliste dont les sommets seront notés F et E (F pour France et E pour étranger).
   b. En déduire la matrice de transition en prenant tout d'abord F puis E pour l'ordre des sommets. On notera M cette matrice.
2. **a.** Donner P_0 , l'état probabiliste initial, l'année 2009.
   b. On donne les résultats suivants :

$$M^2 = \begin{pmatrix}0{,}48 & 0{,}52\\0{,}39 & 0{,}61\end{pmatrix},\quad M^3 = \begin{pmatrix}0{,}444 & 0{,}556\\0{,}417 & 0{,}583\end{pmatrix},\quad M^4 = \begin{pmatrix}0{,}4332 & 0{,}5668\\0{,}4251 & 0{,}5749\end{pmatrix}.$$

   En choisissant la bonne matrice, calculer P_3 .
   En déduire la probabilité que ce couple parte à l'étranger en 2012. *(On donnera le résultat sous forme décimale arrondie au centième.)*
3. Soit P la matrice ligne $(x \quad y)$ donnant l'état stable où x et y sont deux réels positifs tels que $x+y=1$.
   Déterminer l'état stable puis interpréter le résultat.

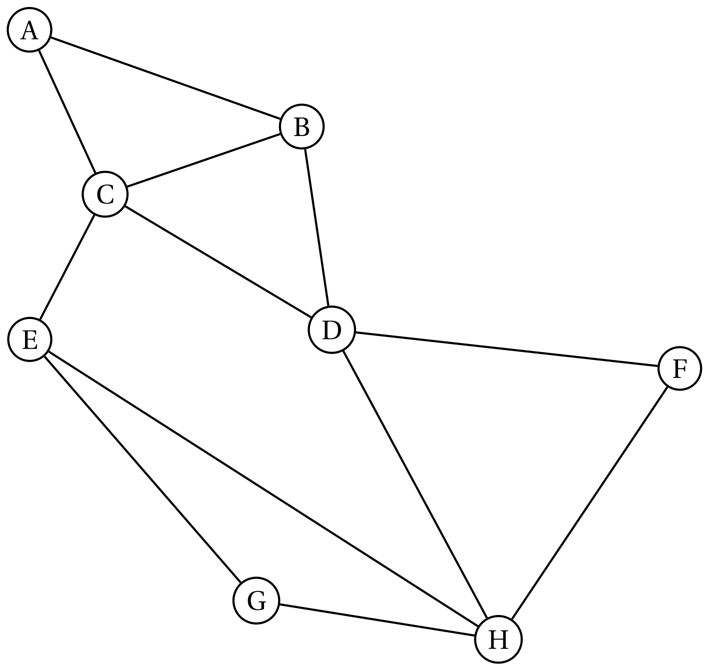
Partie B

1. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $a_{n+1} = 0{,}3\,a_n + 0{,}3$
2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = a_n - \dfrac{3}{7}$.
   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b. En déduire l'expression de u_n, puis celle de a_n en fonction de n.
   c. Déterminer la limite de la suite (a_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
   Que retrouve-t-on ?

38 Extrait de la session « Pondichéry », 13 avril 2011

Un orchestre doit effectuer une tournée passant par les villes A, B, C, D, E, F, G et H, en utilisant le réseau autoroutier.

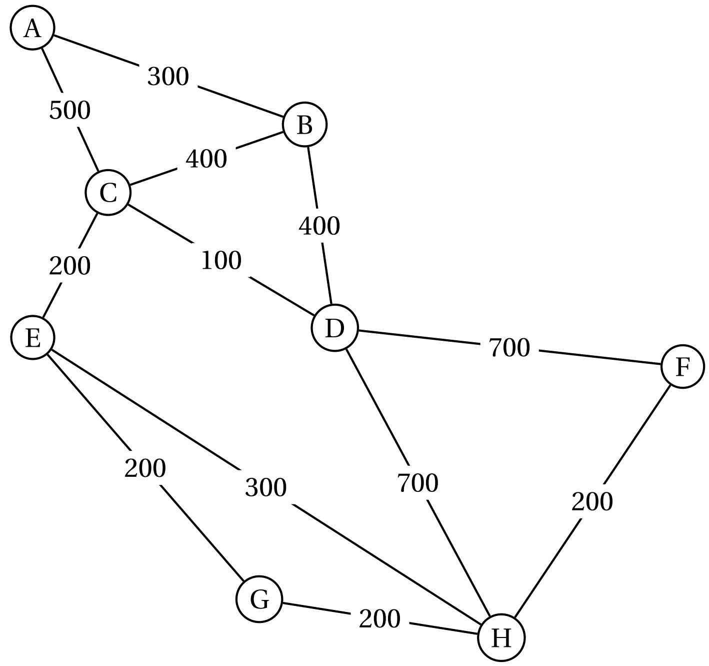
Le graphe Γ ci-dessous représente les différentes villes de la tournée et les autoroutes reliant ces villes (une ville est représentée par un point, une autoroute par une arête) :



1. Est-il possible d'organiser la tournée en passant au moins une fois par chaque ville, tout en empruntant une fois et une seule chaque tronçon d'autoroute ? (La réponse sera justifiée.)
   Si oui, citer un trajet de ce type.
2. On appelle M la matrice associée au graphe Γ (les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique).
   On donne la matrice M^3 :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 & 7 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 4 & 9 & 7 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 9 & 4 & 3 & 5 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 7 & 3 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 3 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 8 & 7 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

   Combien existe-t-il de chemins de longueur 3 reliant B à H ? (La réponse devra être justifiée.)
   Préciser ces chemins.
3. Des contraintes de calendrier imposent en fait d'organiser un concert dans la ville F immédiatement après un concert dans la ville A.
   Le graphe Γ est complété ci-dessous par les longueurs en kilomètres de chaque tronçon (les longueurs des segments ne sont pas proportionnelles aux distances).



Déterminer, en utilisant un algorithme dont on citera le nom, le trajet autoroutier le plus court (en kilomètres) pour aller de A à F.

Préciser la longueur en kilomètres de ce trajet.

39 Extrait de la session « Liban », 30 mai 2011

En 2010, les clients d'une banque nationale se répartissent en deux catégories distinctes, la catégorie A, composée des clients d'agence, et la catégorie I, composée des clients internet.

En 2010, 92 % des clients sont des clients d'agence et 8 % des clients sont des clients internet.
On admet que chaque année, 5 % des clients d'agence deviennent clients internet et inversement 1 % des clients internet deviennent clients d'agence.
On suppose que le nombre de clients de la banque reste constant au cours du temps et qu'un client ne peut faire partie des deux catégories.

On s'intéresse à l'évolution de la répartition des clients de cette banque dans les années à venir.

On note pour tout entier naturel n :

- a_n la probabilité qu'un client de la banque, pris au hasard, soit un client d'agence à l'année $2010+n$,
- i_n la probabilité qu'un client de la banque, pris au hasard, soit un client internet à l'année $2010+n$,
- $P_n = \begin{pmatrix} a_n & i_n \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année $2010+n$.

On note M la matrice de transition, telle que pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = P_n \times M$.

Partie A État stable d'un graphe probabiliste

Dans cette partie, on donnera des valeurs approchées arrondies au centième.

1. Déterminer le graphe probabiliste correspondant à cette situation.
2. Donner P_0 la matrice traduisant l'état probabiliste initial.
   On admettra que $M = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}01 & 0{,}99 \end{pmatrix}$.
3. **a.** Calculer la matrice P_1 .
   b. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la répartition des clients de la banque en 2015.
4. Déterminer, par le calcul, l'état stable de la répartition des clients.
   Interpréter le résultat.

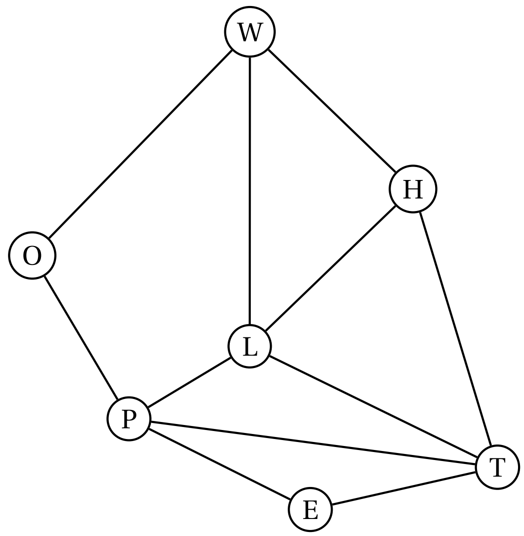
Partie B Étude de la limite d'une suite récurrente

1. **a.** À l'aide de la relation $P_{n+1} = P_n \times M$, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n et i_n .
   b. En déduire que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}94\,a_n + 0{,}01$.
2. On définit la suite (u_n) par $u_n = a_n - \dfrac{1}{6}$ pour tout entier naturel n.
   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite, géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   c. En déduire que pour tout entier naturel n, $a_n = \dfrac{113}{150} \times 0{,}94^n + \dfrac{1}{6}$.
   d. Déterminer la limite de la suite a_n lorsque n tend vers $+\infty$.
   Interpréter le résultat.

40 Extrait de la session « Polynésie », 10 juin 2011

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

On considère le graphe Γ ci-dessous :

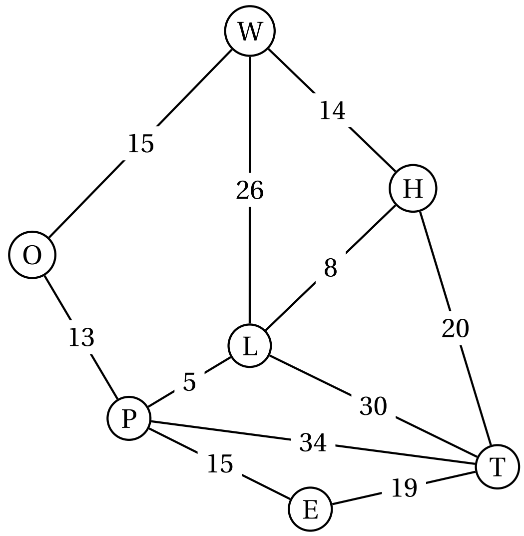


Partie A : étude d'un graphe

1. Ce graphe admet-il une chaîne eulérienne ? (La réponse devra être justifiée.)
   Si oui, donner une telle chaîne.
2. Ce graphe admet-il un cycle eulérien ? (La réponse devra être justifiée.)
   Si oui, donner un tel cycle.
3. Donner la matrice M associée au graphe Γ (les sommets seront pris dans l'ordre alphabétique : E ; H ; L ; O ; P ; T ; W).

Partie B : voyage scolaire

La classe de Terminale d'Arthur est en voyage scolaire en Angleterre.
Les professeurs organisateurs de ce voyage décident de visiter plusieurs sites de Londres.
Les sites retenus dans Londres sont les suivants : Warren Street, Oxford Circus, Piccadilly Circus, Leicester Square, Holborn, Embankment et Temple.
Ces lieux sont désignés respectivement par les lettres W, O, P, L, H, E et T et sont représentés dans le graphe Γ donné ci-dessus (chaque sommet représente un site à visiter et chaque arête une route reliant deux sites).
Les élèves sont laissés en autonomie deux heures pour faire du shopping et ramener des souvenirs à leurs familles. Le point de rendez-vous avec les organisateurs est fixé à Temple.
Les temps de parcours en minutes entre chaque sommet ont été ajoutés sur le graphe.



Arthur, qui est à Oxford Circus, n'a pas vu le temps passer. Lorsqu'il s'en rend compte, il ne lui reste plus que 40 minutes pour arriver à Temple.

1. Déterminer le plus court chemin en minutes reliant Oxford Circus à Temple. Justifier la réponse à l'aide d'un algorithme.
2. Quelle est la longueur en minutes de ce chemin ?
   Arthur sera-t-il en retard ?

41 Extrait de la session « Métropole », Juin 2011

Chaque année, une association de cyclotourisme prépare de nouveaux circuits. Pour satisfaire ses nombreux membres, elle élabore des circuits de différents niveaux : « niveau facile », « niveau moyen » et « niveau difficile ».
Au premier janvier 2010, l'association a fait son bilan :

- 20 % de ses adhérents ont choisi le niveau facile, noté A ;
- 70 % de ses adhérents ont choisi le niveau moyen, noté B ;
- 10 % de ses adhérents ont choisi le niveau difficile, noté C.

Pour répondre aux attentes des adhérents et les fidéliser sur le long terme, une enquête est effectuée.

Il s'avère que, d'une année à l'autre :

- parmi les adhérents ayant choisi le niveau A, 40 % restent à ce niveau et 60 % passent au niveau B ;
- parmi les adhérents ayant choisi le niveau B, 70 % restent à ce niveau et 20 % reviennent au niveau A et les autres passent passent au niveau C ;
- parmi les adhérents ayant choisi le niveau C, 85 % restent à ce niveau et les autres reviennent au niveau B.

On note :

- A l'état « l'adhérent a choisi le niveau A »,
- B l'état « l'adhérent a choisi le niveau B »,
- C l'état « l'adhérent a choisi le niveau C ».

Pour n entier naturel positif ou nul, on note $P_n = (a_n \quad b_n \quad c_n)$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste de la répartition dans les différents niveaux (indiqués dans l'ordre donné dans l'énoncé), au premier janvier de l'année $2010+n$. Ainsi $P_0 = (0,2 \quad 0,7 \quad 0,1)$.

On se décide se baser uniquement sur ces résultats pour prévoir l'évolution de la répartition à partir du premier janvier 2010 (on néglige donc les nouveaux abonnés et les départs).

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets A, B et C.
2. Reproduire et compléter la matrice de transition M de ce graphe probabiliste, en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

$$M = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & 0 \\ 0,2 & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0,15 & \cdots \end{pmatrix}$$

3. Une seule des trois matrices Q, R, T ci-dessous correspond à l'état probabiliste stable.

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

   Le président de l'association affirme que 50 % des adhérents choisiront après un certain nombre d'années le niveau B.
   Cette affirmation est-elle correcte ?

42 Extrait de la session « Amérique du Sud », 16 novembre 2011

Franck Geek est adepte de jeux vidéo en ligne. Afin de préserver son temps de travail scolaire, il essaye de se modérer.

Il constate que :

- s'il a joué un jour, la probabilité qu'il ne le fasse pas le lendemain est de 0,6 ;
- s'il n'a pas joué un jour, la probabilité qu'il joue le lendemain est de 0,9.

Le jour de la rentrée (premier jour), Franck a décidé de ne pas jouer.

1. **a.** Quelle est la probabilité que Franck joue le deuxième jour ?
   b. Quelle est la probabilité qu'il ne joue pas le deuxième jour ?
2. On note D l'évènement « Franck a joué » et E l'évènement « Franck a su résister ».
   a. Modéliser cette situation par un graphe probabiliste.
   b. Donner la matrice de transition M associée à ce graphe.
3. Soit n un entier naturel non nul. Soient D_n l'évènement : « Franck a joué le n-ième jour » et E_n l'évènement : « Franck a su résister le n-ième jour ».
   L'état probabiliste lors du n-ième jour est alors donné par la matrice ligne $P_n = (d_n \quad e_n)$ où d_n désigne la probabilité de l'évènement D_n et e_n celle de l'évènement E_n.
   On a ainsi $P_1 = (0 \quad 1)$.
   a. Déterminer P_2.
   b. Donner la relation liant P_{n+1} et P_n.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $d_{n+1} = -0,5\,d_n + 0,9$.
4. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = d_n - 0,6$.
   a. Démontrer que la suite u est une suite géométrique.
   Préciser sa raison et la valeur de son premier terme.
   b. Exprimer alors u_n puis d_n en fonction de n.
   c. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} d_n$ et interpréter ce résultat.

43 Extrait de la session « Amérique du Nord », 31 mai 2012

Un club de sport propose à ses adhérents deux types d'abonnements : l'abonnement de type A qui donne accès à toutes les installations sportives et l'abonnement de type B qui, en plus de toutes les installations sportives, donne accès au saune, au hammam et au jacuzzi.
Chaque adhérent doit choisir un des deux abonnements.

La première année, en 2010, 80 % des adhérents ont choisi l'abonnement de type A.
On considère ensuite que 30 % des adhérents ayant un abonnement de type A changent d'abonnement pour l'année suivante, tandis que 10 % des adhérents ayant un abonnement de type B changent d'abonnement pour l'année suivante.

Soit n un entier supérieur ou égal à 0.
On note a_n la proportion des adhérents ayant un abonnement de type A l'année $2010+n$.
On note b_n la proportion des adhérents ayant un abonnement de type B l'année $2010+n$.
Enfin on note $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice traduisant l'état probabiliste de l'année $2010+n$.

1. Déterminer P_0.
2. Représenter la situation par un graphe probabiliste.
3. Écrire la matrice de transition M associée à cette situation.
4. Déterminer la matrice P_2.
   En déduire la probabilité pour qu'en 2012 un adhérent choisisse l'abonnement de type A.
5. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 0, $a_{n+1} = 0{,}6\,a_n + 0{,}1$.
6. Pour tout entier n supérieur ou égal à 0, on pose $u_n = 4\,a_n - 1$.
   Montrer que la suite (u_n) est géométrique de raison 0,6.
   Préciser son premier terme.
7. Pour tout entier n supérieur ou égal à 0, exprimer u_n en fonction de n.
   En déduire a_n en fonction de n.
8. Calculer la limite de la suite (a_n) puis interpréter concrètement ce résultat.

44 Extrait de la session « Liban », 29 mai 2012

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

Cet exercice consiste à étudier la propagation d'une information d'une personne à l'autre, thème souvent abordé en sciences sociales. Cette information se transmet avec un risque d'erreur, c'est-à-dire avec une probabilité de propagation de l'information contraire.

Dans cet exercice, on considère l'information suivante, notée E, « Paul a réussi son examen ».

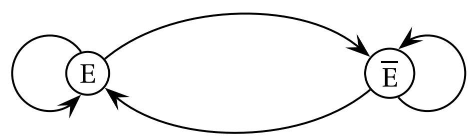
Partie A : Propagation symétrique (de type « neutre »)

Dans cette partie, on suppose que, pour une information reçue (E ou $\overline{\text{E}}$), la probabilité de communiquer cette information à l'identique vaut 0,9 et la probabilité de relayer l'information contraire vaut 0,1.

On note p_n la probabilité de recevoir l'information E au bout de n étapes (n étant le nombre de personnes ayant transmis l'information) et on note q_n la probabilité de recevoir l'information $\overline{\text{E}}$ au bout de n étapes.

On suppose que Paul a réussi son examen, on pose $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$.

1. Recopier puis compléter le graphe probabiliste relatif à la propagation de l'information suivant :



2. Préciser la matrice de transition M telle que $\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & q_n\end{pmatrix}$ M.
3. À l'aide de la calculatrice, trouver le plus petit entier naturel n tel que $p_n < 0,8$.
4. Déterminer par le calcul, l'état stable.

Partie B : Propagation asymétrique (de type « rumeur »)

Dans cette partie, on suppose toujours que la probabilité de transmission correcte de l'information E est égale à 0,9. Toutefois, il circule la fausse rumeur $\overline{\text{E}}$. Dans ces conditions, on suppose que si l'information reçue est $\overline{\text{E}}$, la probabilité de transmettre cette information $\overline{\text{E}}$ est égale à 1.

On suppose de nouveau que $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$.

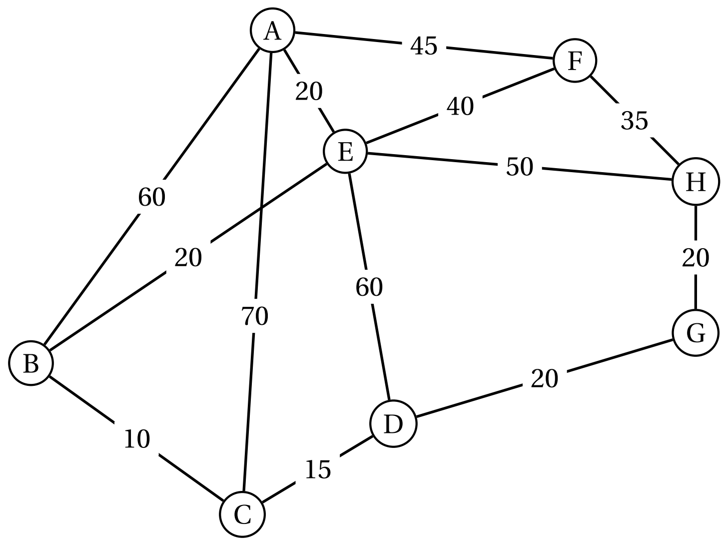
1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste.
2. Préciser la matrice de transition N telle que $\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & q_n\end{pmatrix}$ N.
3. Montrer que $p_{n+1} = 0,9\,p_n$.
   Quelle est la nature de la suite $\left(p_n\right)$?
4. Exprimer p_n en fonction de n.
5. Trouver par le calcul, le plus petit entier naturel n tel que $p_n < 0,5$.
6. Déterminer la limite de $\left(p_n\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$ puis interpréter le résultat obtenu.

45 Extrait de la session « Polynésie », 8 juin 2012

Jonathan est un sportif adepte du semi-marathon (course à pied de 21,1 km).
Depuis le 1er janvier 2012, il a décidé de courir un semi-marathon par mois.
Afin d'améliorer sa préparation, il décide d'enchaîner les courses pédestres de 10 km dans différentes villes.

PARTIE A

Le graphe pondéré ci-dessous représente les villes A, B, C, D, E, F, H organisant des courses de 10 km et la ville G est celle organisant le prochain semi-marathon auquel Jonathan est inscrit.
Le poids de chaque arête représente le temps, en minutes, nécessaire pour relier une ville à une autre grâce aux transports en commun.



Jonathan vient de courir dans la ville A et souhaite se rendre dans la ville G pour repérer le parcours de son prochain semi-marathon.
Déterminer à l'aide d'un algorithme le chemin permettant de relier le plus rapidement la ville A à la ville G et donner la durée de ce parcours en minutes.

PARTIE B

Grâce à son entraînement et à son expérience, Jonathan sait que :

- s'il a terminé la course lors de son précédent semi-marathon, il terminera le prochain semi-marathon avec une probabilité de 0,62 ;
- s'il a abandonné lors de son précédent semi-marathon, il terminera le prochain semi-marathon avec une probabilité de 0,8.

Jonathan a terminé son semi-marathon de janvier 2012.
Pour tout entier naturel n, on note P_n la matrice ligne $\begin{pmatrix} r_n & t_n \end{pmatrix}$ traduisant l'état probabiliste du n-ième mois écoulé depuis janvier 2012, où r_n désigne la probabilité que Jonathan abandonne au semi-marathon du n-ième mois et t_n la probabilité que Jonathan termine le semi-marathon du n-ième mois.
L'état probabiliste initial, correspondant à janvier 2012, est donc donné par $P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Traduire les données par un graphe probabiliste dont les sommets sont notés R et T (R lorsque Jonathan abandonne, T lorsqu'il termine le semi-marathon).
2. En déduire la matrice de transition en considérant les sommets dans l'ordre alphabétique.
3. Calculer l'état probabiliste P_2.
   En déduire la probabilité que Jonathan ait abandonné lors du semi-marathon couru en mars 2012.
4. Soit P la matrice ligne $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ donnant l'état stable.
   - **a.** Calculer les valeurs de x et de y arrondies à 10^{-3} près.
   - **b.** Interpréter les résultats obtenus.

46 Extrait de la session « Antilles – Guyane », 19 juin 2012

Dans une grande entreprise, tous les agents commerciaux ont une voiture de fonction, qu'ils doivent choisir entre deux marques A et B.
Le parc de véhicules (en location) est renouvelé tous les ans.

On suppose que le nombre d'agents commerciaux de l'entreprise ne varie pas, et que les deux marques A et B restent les seules possibilités pour les voitures de fonction proposées dans l'entreprise.

On a constaté que, chaque année :

- 5 % des agents commerciaux utilisant un véhicule de marque A changent l'année suivante pour B ;
- 15 % des agents commerciaux utilisant un véhicule de marque B changent l'année suivantes pour A ;
- les autres agents poursuivent l'année suivante avec un véhicule de même marque.

On appelle a_n la probabilité qu'un agent commercial choisi au hasard utilise un véhicule de marque A au début de l'année $2010+n$, et b_n la probabilité qu'il utilise un véhicule de marque B au début de cette même année.

On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année $2010+n$.

En 2010, la moitié des agents commerciaux possédaient un véhicule de marque A. Ainsi, $P_0 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B puis donner la matrice de transition M (on considèrera les sommets du graphe dans l'ordre alphabétique).
2. Justifier que $P_1 = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \end{pmatrix}$ et donner une interprétation concrète des coefficients de cette matrice.
3. Déterminer l'état probabiliste stable du système et interpréter les résultats obtenus.
4. **a.** Que vaut, pour tout entier naturel n, la somme $a_n + b_n$?

   b. On sait, pour tout entier naturel n, que $P_{n+1} = P_n \times M$.
   Démontrer, pour tout entier naturel n, que $a_{n+1} = 0,8\,a_n + 0,15$.
5. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = a_n - 0,75$.

   a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométriques de raison 0,8 dont on précisera le premier terme.

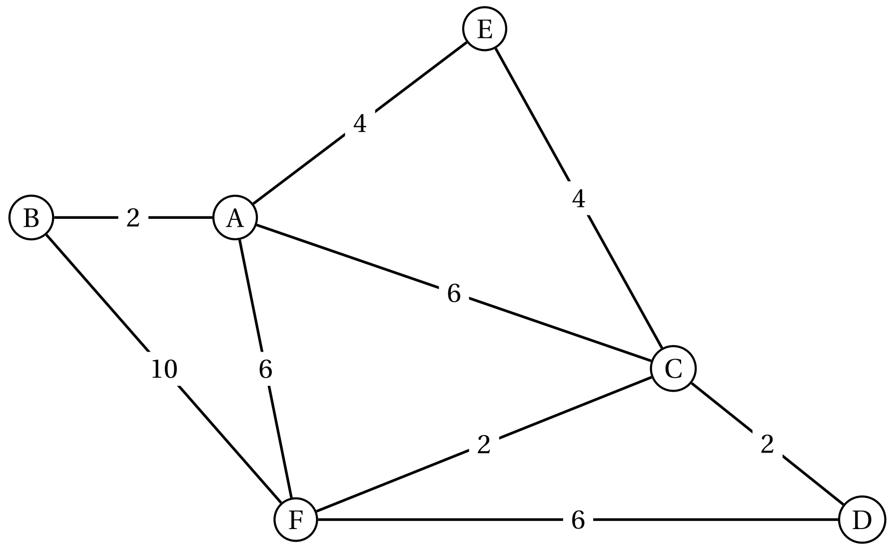
   b. Exprimer u_n en fonction de n, puis démontrer que pour tout entier naturel n,

   $$a_n = -0,25 \times 0,8^n + 0,75$$

   c. Déterminer la limite de la suite (a_n).
   Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?

47 Extrait de la session « Asie », 20 juin 2012

Une association organise un rallye sportif en VTT : six zones de regroupement sont déterminées et sont reliées par des chemins.
Ce parcours est modélisé par le graphe ci-dessous, où les sommets de A à F représentent les zones de regroupement, et les arêtes les chemins.
Les arêtes sont pondérées par les distances, exprimées en kilomètres, nécessaires pour parcourir ces chemins.
Les candidats sont positionnés initialement sur la zone A et doivent, après avoir parcouru tous les chemins, revenir à la zone initiale.
Chaque fois qu'un candidat emprunte pour la première fois un chemin il doit déposer, à un endroit précis, un jeton personnalisé, attestant son passage.



1. Quel nombre minimal de jetons est-il nécessaire de donner à chaque candidat ?
2. Un candidat souhaite faire le parcours, en empruntant tous les chemins une fois et une seule.
   Est-ce possible ? Justifier la réponse.
3. Soit M la matrice associée au graphe G (on ordonne les sommets dans l'ordre alphabétique).
   a. Écrire la matrice M.
   b. On donne les matrices $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 9 & 4 & 6 & 9 \\ 6 & 2 & 4 & 3 & 3 & 6 \\ 9 & 4 & 6 & 6 & 6 & 9 \\ 4 & 3 & 6 & 2 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 6 & 3 & 2 & 4 \\ 9 & 6 & 9 & 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$
   Un candidat est actuellement au point de rendez-vous D et on lui signale qu'il a oublié son dossard au point B. Devant le récupérer, il souhaite emprunter au maximum trois chemins.
   Combien a-t-il de possibilités ?
   c. Donner, le trajet correspondant à la distance la plus courte lui permettant d'aller récupérer son dossard.

48 Extrait de la session « Centres étrangers », 13 juin 2012

Au rugby, réussir une transformation consiste à faire passer le ballon entre deux poteaux verticaux et au dessus de la barre horizontale reliant ces deux poteaux.

Basile est un joueur de rugby, il envisage de devenir professionnel.

Ses différentes expériences en championnat conduisent aux résultats suivants :

- lors d'un match, la probabilité que Basile réussisse la première transformation est égale à 0,5 ;
- si Basile réussit une transformation, la probabilité qu'il réussisse la transformation suivante est égale à 0,8 ;
- si Basile ne réussit pas une transformation, la probabilité qu'il réussisse la transformation suivante est égale à 0,6.

Basile se prépare pour son match de sélection en tant que professionnel.

On considère que lors du match, n transformations sont tentées avec n entier naturel supérieur ou égal à 1.
On note T l'état « Basile réussit sa transformation ».

Pour $n \geqslant 1$, on note :

- p_n la probabilité que Basile réussisse la n-ième transformation.
- q_n la probabilité que Basile ne réussisse pas la n-ième transformation.
- $P_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste lors de la n-ième transformation.

On a $P_1 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

Partie A

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets T et $\overline{\text{T}}$.
2. Donner la matrice de transition M de ce graphe probabiliste.
3. Déterminer l'état probabiliste P_2.

Partie B

1. **a.** En utilisant l'égalité $P_{n+1} = P_n M$, montrer que $p_{n+1} = 0,8\,p_n + 0,6\,q_n$.
   b. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, $p_{n+1} = 0,2\,p_n + 0,6$.
2. Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \geqslant 1$ par $u_n = p_n - 0,75$.
   a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,2.
   b. En déduire que la suite (p_n) converge et donner sa limite.
   c. Interpréter le résultat précédent.

49 Extrait de la session « Métropole », 22 juin 2012

Une région se divise en deux zones, une zone A à proximité d'une grande agglomération et une zone B à proximité de la mer.

Chaque année, 20 % des habitants de la zone A partent habiter dans la zone B pour avoir un meilleur cadre de vie, et 5 % des habitants de la zone B partent habiter dans la zone A pour se rapprocher de leur lieu de travail.
On sait de plus qu'en 2010, 40 % de la population habitait en zone A.
On suppose que le nombre total d'habitants de la région reste constant au cours du temps.

Pour tout entier naturel n, l'état probabiliste correspondant à l'année $2010+n$ est défini par la matrice ligne $P_n = \begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}$, où a_n et b_n désignent respectivement les proportions d'habitants des zones A et B.

1. Déterminer la matrice ligne P_0 de l'état initial.

2. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.

3. **a.** Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

b. Donner la répartition de la population en 2012.

4. Dans la question suivante, on considère la matrice ligne $P = \begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}$ où a et b sont deux nombres réels tels que $a+b=1$.

a. Déterminer a et b pour que $P = PM$.

b. Les infrastructures de la zone B permettent d'accueillir au maximum 75 % de la population. Lors d'un conseil municipal, le maire affirme qu'il va falloir prévoir de nouvelles infrastructures.
A-t-il raison ?

50 Extrait de la session « Polynésie », 13 septembre 2012

Le centre commercial Commerce Plus est implanté dans une ville.

La première semaine, 80 % des habitants de la ville viennent faire leurs achats dans ce centre commercial, puis on constate dans les semaines suivantes que :

- la probabilité qu'un habitant étant venu faire des achats dans le centre commercial y retourne la semaine suivante est égale à 0,55 ;
- la probabilité qu'un habitant n'étant pas venu faire des achats dans le centre commercial y aille la semaine suivante est égale à 0,6.

On cherche à étudier l'évolution de la répartition des visites des habitants dans le centre commercial sur plusieurs semaines.

1. On note A l'état « l'habitant vient faire ses courses au centre commercial ».
On note B l'état « l'habitant ne vient pas faire ses courses au centre commercial ».

a. Représenter la situation ci-dessus par un graphe probabiliste.

b. On note M la matrice de transition de ce graphe.

Vérifier que $M = \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}45 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$.

2. On appelle $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice traduisant la répartition des habitants selon leur venue au centre commercial au cours de la n-ième semaine :

- a_n représente la proportion d'habitants qui vient faire ses courses au centre commercial au cours de la n-ième semaine ;
- b_n représente la proportion d'habitants qui ne vient pas faire ses courses au centre commercial au cours de la n-ième semaine.

Ainsi, on a $P_1 = (0{,}8 \quad 0{,}2)$.

a. Calculer P_2 et P_3 .

b. Donner une interprétation de P_3 en termes de répartition des habitants.

3. Soit $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste stable.

a. Déterminer x et y. On donnera les valeurs exactes puis les résultats arrondis au centième.

b. Interpréter ces résultats.

51 Extrait de la session « Antilles – Guyane », 14 septembre 2012

Les employés d'une grande zone commerciale ont le choix entre deux types de restaurants : un « self » ou un restaurant « traditionnel » avec service à la place. On admet que tous les employés mangent chaque jour dans l'un des deux restaurants.

On a constaté que :

- si un employé mange au « self » un jour donné, alors le lendemain il y mange également avec une probabilité de 0,8 ;
- si un employé mange dans le restaurant « traditionnel » un jour donné, alors le lendemain il change pour le « self » avec une probabilité de 0,4.

On choisit au hasard un employé de la zone commerciale.

Si n est un entier naturel non nul, on appelle s_n la probabilité que l'employé choisi mange au « self » le n-ième jour, et par $t_n = 1 - s_n$ la probabilité qu'il mange au restaurant « traditionnel » le n-ième jour.
Pour l'état initial, on admet que $s_1 = t_1 = 0{,}5$, c'est-à-dire que le premier jour, les probabilités de choix du « self » ou du restaurant « traditionnel » sont égales.
Dans la suite, pour tout entier naturel n non nul, on note P_n la matrice $P_n = \begin{pmatrix} s_n & t_n \end{pmatrix}$.

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste.
2. Justifier l'égalité matricielle $P_{n+1} = P_n \times M$ où M désigne la matrice $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ et n un entier naturel non nul.
3. Déterminer la probabilité que l'employé tiré au sort mange au « self » le deuxième jour.
4. Déterminer l'état probabiliste stable et l'interpréter.
5. Démontrer que pour tout entier nature n non nul, on a : $s_{n+1} = \dfrac{2}{5} s_n + \dfrac{2}{5}$.
6. Dans la suite, pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = s_n - \dfrac{2}{3}$.
   - **a.** Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$ et de premier terme $u_1 = -\dfrac{1}{6}$.
   - **b.** Déterminer l'expression de u_n en fonction de n, où n est un entier naturel non nul.
   - **c.** En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $s_n = -\dfrac{1}{6} \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1} + \dfrac{2}{3}$.
   - **d.** Déterminer la limite de la suite (s_n) quand n tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat.

52 Extrait de la session « Amérique du Sud », 14 novembre 2012

Un employé se rend à son travail en bus et, soit il n'est pas en retard, c'est-à-dire qu'il est à l'heure ou en avance, soit il est en retard.
Le 1er jour, la probabilité que cet employé arrive en retard est de 0,2.

Pour les jours suivants :

- s'il est en retard un jour donné, alors la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est de 0,05 ;
- si l'employé n'est pas en retard un jour donné, alors la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est de 0,2.

Pour tout entier naturel n non nul, on note

- R_n l'évènement « l'employé est en retard à son travail le n-ième jour » ;
- H_n l'évènement « l'employé n'est pas en retard à son travail le n-ième jour ».

On note également, pour tout entier naturel n non nul :

- r_n la probabilité que l'employé soit en retard le n-ième jour ;
- h_n la probabilité que l'employé ne soit pas en retard le n-ième jour ;
- $P_n = \begin{pmatrix} r_n & h_n \end{pmatrix}$ la matrice qui traduit l'état probabiliste au n-ième jour.

1. Déterminer l'état initial P_1 .
2. **a.** Tracer un graphe probabiliste traduisant les données de l'énoncé.
   b. Donner la matrice de transition M associée à ce graphe.
3. Quelle est la probabilité que cet employé soit en retard le 3e jour ? On donnera le résultat avec une valeur arrondie au centième.
4. Soit $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ l'état probabiliste stable.
   a. Montrer que x et y vérifient la relation $y = 0{,}95\,x + 0{,}8\,y$.
   b. Déterminer l'état stable du système en arrondissant les valeurs au millième.
   Interpréter ces résultats.

53 Extrait de la session « Nouvelle-Calédonie », 19 novembre 2012

Afin d'être performant lors d'une grande compétition, Christophe, champion d'athlétisme spécialiste du sprint, s'entraine chaque jour de l'année et réalise quotidiennement une course à pleine vitesse sur 100 mètres en tentant de courir en moins de 10 secondes.

On constate que :

- S'il réalise moins de 10 secondes sur 100 mètres un jour, la probabilité qu'il réalise moins de 10 secondes sur 100 mètres le lendemain est égale à 0,75.
- S'il ne réalise pas moins de 10 secondes sur 100 mètres un jour, la probabilité qu'il réalise moins de 10 secondes sur 100 mètres le lendemain est égale à 0,5.

Le premier jour de l'année, Christophe n'a pas réussi à réaliser moins de 10 secondes sur sa course à pleine vitesse.

Soit n un entier naturel non nul. On note :

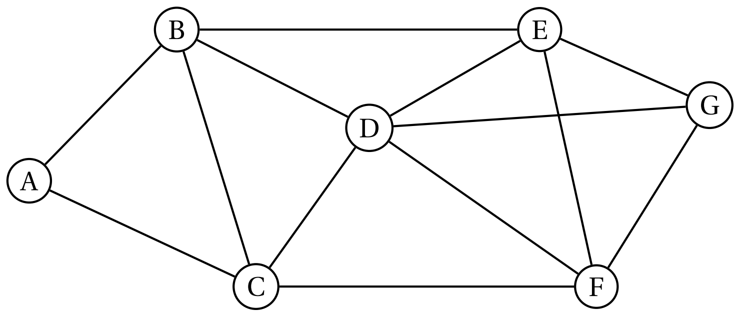
- a_n la probabilité que Christophe réalise moins de 10 secondes le n-ième jour ;
- b_n la probabilité que Christophe ne réalise pas moins de 10 secondes le n-ième jour ;
- $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste le n-ième jour.

1. Écrire la matrice ligne P_1 de l'état probabiliste initial.
2. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B (A représentant l'état « Christophe réalise moins de 10 secondes au 100 mètres », B représentant l'état « Christophe ne réalise pas moins de 10 secondes au 100 mètres »).
3. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en considérant les états dans l'ordre alphabétique.
4. Déterminer la matrice ligne P_3 .
   Comment peut-on interpréter ce résultat pour Christophe ?
5. Soit $P = (a \quad b)$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste stable.
   a. Justifier que a et b vérifient le système $\begin{cases} 0,25\,a - 0,5\,b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$.
   b. Lors d'une interview à un journaliste sportif, Christophe déclare : « Au vu de tous les entrainements effectués pour me préparer à ce grand évènement je suis confiant et je pense avoir deux chances sur trois de pouvoir réaliser moins de 10 secondes sur 100 mètres lors de la compétition ».
   Cette affirmation vous paraît-elle justifiée ?

54 Extrait de la session « Pondichéry », 15 avril 2013

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

On considère le graphe Γ ci-dessous :

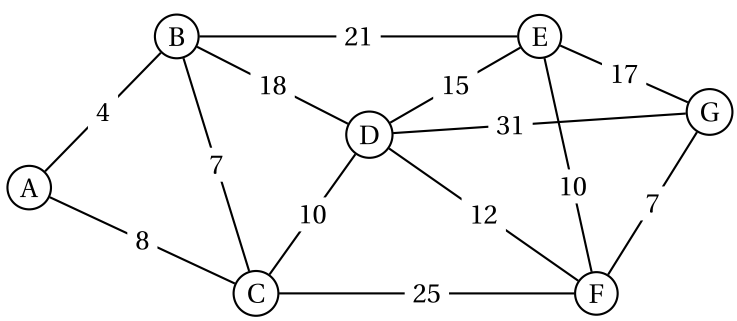


PARTIE A

1. Ce graphe admet-il une chaîne eulérienne ? Justifier la réponse. Si oui, donner une telle chaîne.
2. Ce graphe admet-il un cycle eulérien ? Justifier la réponse. Si oui, donner un tel cycle.
3. Donner la matrice M associée au graphe Γ. Les sommets seront pris dans l'ordre alphabétique : A, B, C, D, E, F et G.

PARTIE B

Une région est munie d'un réseau de trains, représenté par le graphe Γ ci-dessous.
Les stations sont symbolisées par les sommets A, B, C, D, E, F et G. Chaque arête représente une ligne reliant deux gares. Les temps de parcours (correspondance comprise) en minutes entre chaque sommet ont été rajoutés sur le graphe.



1. Déterminer le plus court chemin en minutes, reliant la gare B à la gare G.
   Justifier la réponse grâce à un algorithme.
2. Quelle est la longueur en minutes de ce chemin ?

55 Extrait de la session « Amérique du Nord », 30 mai 2013

Léa est inscrite sur les réseaux sociaux et consulte régulièrement sa page.

On considère que :

- si Léa s'est connectée un certain jour, la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à 0,9 ;
- si Léa ne s'est pas connectée un certain jour, la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à 0,8.

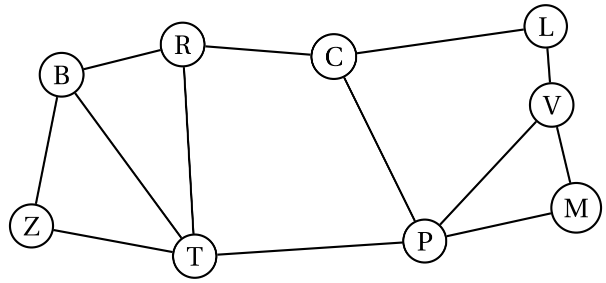
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note a_n la probabilité que Léa se connecte le n-ième jour et b_n la probabilité qu'elle ne se connecte pas le n-ième jour.
On a donc : $a_n + b_n = 1$.

Le 1[er] jour, Léa ne s'est pas connectée, on a donc $a_1 = 0$.

1. **a.** Traduire les données par un graphe probabiliste.
   b. Préciser la matrice M de transition associée à ce graphe.
   c. Déterminer la probabilité que Léa se connecte le troisième jour.
2. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $a_{n+1} = 0,1\,a_n + 0,8$.
3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier $n \geqslant 1$, par $u_n = a_n - \dfrac{8}{9}$.
   a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique, préciser sa raison et son premier terme.
   b. Exprimer u_n puis a_n en fonction de n.
4. **a.** Déterminer en justifiant la limite de (a_n).
   b. Interpréter ce résultat.

56 Extrait de la session « Liban », 28 mai 2013

Le graphe ci-dessous représente les autoroutes entre les principales villes du Sud de la France :
Bordeaux (B), Clermont-Ferrand (C), Lyon (L), Marseille (M), Montpellier (P), Brive (R), Toulouse (T), Valence (V) et Biarritz (Z).



1. Pour cette question, on justifiera chaque réponse.

- **a.** Déterminer l'ordre du graphe.
- **b.** Déterminer si le graphe est connexe.
- **c.** Déterminer si le graphe est complet.

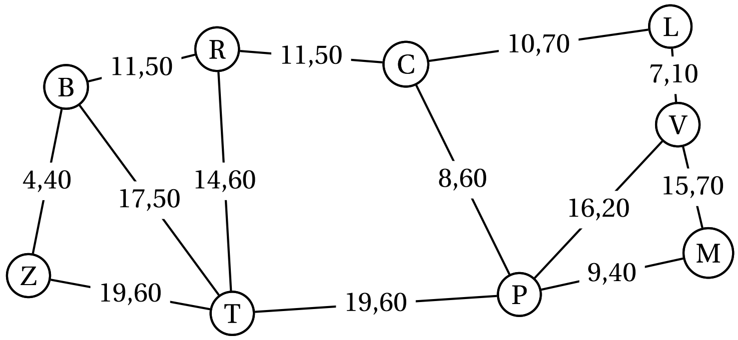
2. Un touriste atterrit à l'aéroport de Lyon et loue une voiture.
Déterminer, en justifiant, s'il pourra visiter toutes les villes en empruntant une et une seule fois chaque autoroute.

3. Il décide finalement d'aller seulement de Lyon à Biarritz.
On note N la matrice associée au graphe, les sommets étant rangés dans l'ordre alphabétique : B, C, L, M, P, R, T, V et Z.
Voici les matrices N et N^3 :

$$N = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1&1&0&1\\ 0&0&1&0&1&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&0&1&1&0\\ 1&1&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&1&1&0&0&1\\ 0&0&1&1&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix} \text{ et } N^3 = \begin{pmatrix} 4&2&1&1&3&6&6&1&5\\ 2&0&5&2&8&6&1&1&3\\ 1&5&0&2&1&0&3&5&0\\ 1&2&2&2&5&2&1&4&1\\ 3&8&1&5&2&1&8&7&1\\ 6&6&0&2&1&2&8&3&2\\ 6&1&3&1&8&8&4&1&6\\ 1&1&5&4&7&3&1&2&1\\ 5&3&0&1&1&2&6&1&2 \end{pmatrix}$$

- **a.** En détaillant le calcul, déterminer le coefficient de la troisième ligne et dernière colonne de la matrice N^4.
- **b.** En donner une interprétation.

4. Sur les arêtes du graphe sont maintenant indiqués les prix des péages en euro.



- **a.** À l'aide de l'algorithme de Dijkstra, déterminer le chemin que doit prendre le touriste pour minimiser le coût des péages de Lyon à Biarritz.
- **b.** Déterminer le coût, en euro, de ce trajet.

57 Extrait de la session « Polynésie », 7 juin 2013

Les parties A et B sont indépendantes.

Alors qu'une entreprise A possédait le monopole de l'accès à internet des particuliers, une entreprise concurrente B est autorisée à s'implanter.
Lors de l'ouverture au public en 2010 des services du fournisseur d'accès B, l'entreprise A possède 90 % du marché et l'entreprise B possède le reste du marché.
Dans cet exercice, on suppose que chaque année, chaque internaute est client d'une seule entreprise A ou B.
On observe à partir de 2010 que chaque année, 15 % des clients de l'entreprise A deviennent des clients de l'entreprise B, et 10 % des clients de l'entreprise B deviennent des clients de l'entreprise A.
Pour tout entier naturel n, on note a_n la probabilité qu'un internaute de ce pays, choisi au hasard, ait son accès à internet fourni par l'entreprise A pour l'année $2010+n$, et b_n, la probabilité pour que son fournisseur d'accès en $2010+n$ soit l'entreprise B.
On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année $2010+n$ et on a ainsi $a_0 = 0,9$ et $b_0 = 0,1$.

Partie A

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste.
2. **a.** Déterminer la matrice de transition M de ce graphe.
   b. Montrer qu'en 2013, l'état probabiliste est environ $\begin{pmatrix} 0,61 & 0,39 \end{pmatrix}$.
   c. Déterminer l'état stable $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ de la répartition des clients des entreprises A et B.
   Interpréter le résultat.

Partie B

Lors d'une campagne de marketing l'entreprise B distribue un stylo ou un porte-clés ; il en coûte à l'entreprise 0,80 € par stylo et 1,20 € par porte-clés distribué.
À la fin de la journée l'entreprise a distribué 550 objets et cela lui a coûté 540 €.
On cherche le nombre s de stylos et le nombre c de porte-clés distribués.

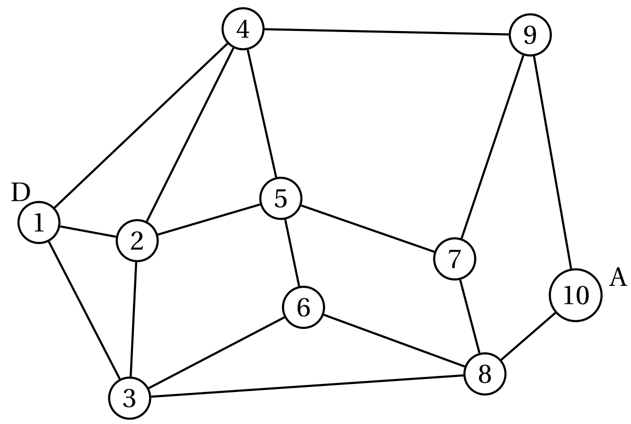
1. Écrire un système traduisant cette situation.
2. Montrer que le système précédent est équivalent à $R \times X = T$ où $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0,8 & 1,2 \end{pmatrix}$ et X et T sont des matrices que l'on précisera.
3. Résoudre le système à l'aide de la calculatrice. Interpréter le résultat.

58 Extrait de la session « Antilles – Guyane », 19 juin 2013

Un guide de randonnée en montagne décrit les itinéraires possibles autour d'un pic rocheux.
La description des itinéraires est donnée par le graphe ci-contre. Les sommets de ce graphe correspondent aux lieux remarquables. Les arêtes de ce graphe représentent les sentiers possibles entre ces lieux.

Légende :

① Départ ② Passerelle
③ Roche percée ④ Col des 3 vents
⑤ Pic rouge ⑥ Refuge
⑦ Col vert ⑧ Pont Napoléon
⑨ Cascade des anglais ⑩ Arrivée

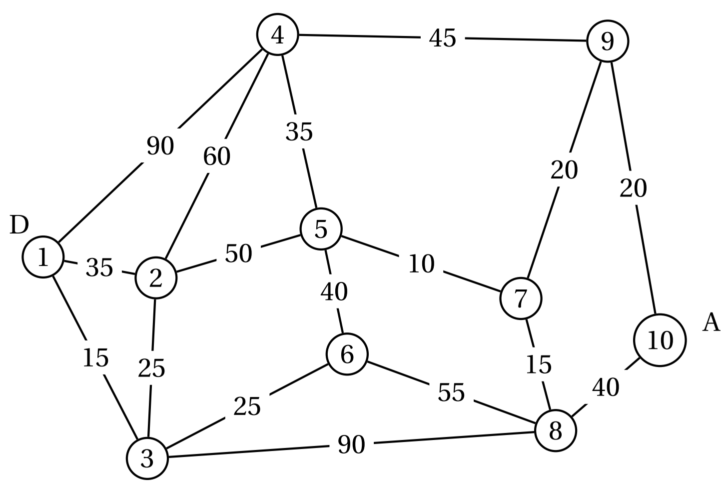


1. Donner un itinéraire allant de D à A passant par tous les sommets du graphe une seule fois mais n'empruntant pas forcément tous les sentiers.
2. Existe-t-il un itinéraire allant de D à A utilisant tous les sentiers une seule fois ?
   Justifier votre réponse.
3. On note M la matrice d'adjacence associée à ce graphe, les sommets étant pris dans l'ordre.
   On donne ci-contre M^5.
   a. Que représente le nombre 89 situé sur la deuxième ligne et la quatrième colonne ?
   b. Déterminer le nombre d'itinéraires allant de D à A empruntant 5 sentiers.
   Citer un tel itinéraire passant par le Pic rouge.

$$M^5 = \begin{pmatrix} 56 & 78 & 75 & 82 & 59 & 57 & 54 & 40 & 26 & 31 \\ 78 & 88 & 95 & 89 & 96 & 57 & 50 & 65 & 48 & 30 \\ 75 & 95 & 68 & 68 & 77 & 68 & 46 & 73 & 52 & 23 \\ 82 & 89 & 68 & 62 & 98 & 49 & 29 & 79 & 67 & 13 \\ 59 & 96 & 77 & 98 & 50 & 82 & 80 & 40 & 24 & 46 \\ 57 & 57 & 68 & 49 & 82 & 36 & 25 & 68 & 49 & 16 \\ 54 & 50 & 46 & 29 & 80 & 25 & 10 & 73 & 60 & 5 \\ 40 & 65 & 73 & 79 & 40 & 68 & 73 & 32 & 14 & 48 \\ 26 & 48 & 52 & 67 & 24 & 49 & 60 & 14 & 6 & 39 \\ 31 & 30 & 23 & 13 & 46 & 16 & 5 & 48 & 39 & 2 \end{pmatrix}$$

4. On a complété ci-contre le graphe décrivant les itinéraires avec les temps de parcours en minutes pour chacun des sentiers.

   Déterminer l'itinéraire allant de D à A le plus court en temps.
   On fera apparaître la démarche en utilisant un algorithme.

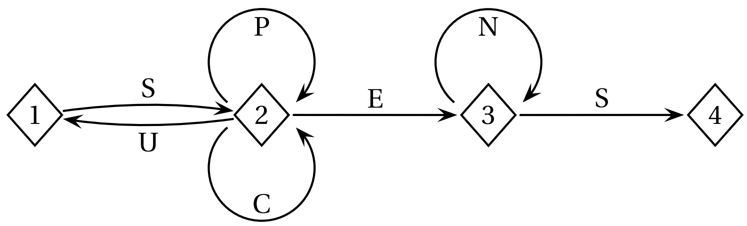


59 Extrait de la session « Asie », 19 juin 2013

Les deux parties de l'exercice sont indépendantes.

Partie A

Pour accéder à sa messagerie, Antoine a choisi un code qui doit être reconnu par le graphe étiqueté suivant, de sommets 1, 2, 3 et 4 :



Une succession des lettres constitue un code possible si ces lettres se succèdent sur un chemin du graphe orienté ci-dessus, en partant du sommet 1 et en sortant au sommet 4. Les codes SES et SPPCES sont ainsi des codes possibles, contrairement aux codes SUN et SPEN.

1. Parmi les trois codes suivants, écrire sur votre copie le (ou les) code(s) reconnu(s) par le graphe.

   SUCCÈS SCÈNES SUSPENS

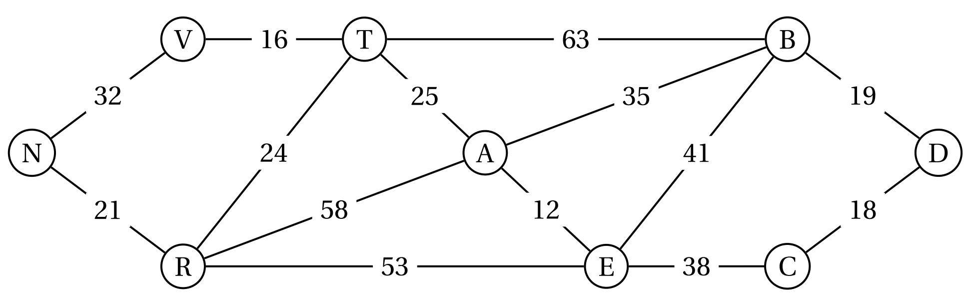
2. Recopier et compléter la matrice d'adjacence A associée au graphe. On prendra les sommets dans l'ordre 1, 2, 3 et 4.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

3. Avec une calculatrice, on a calculé $A^4 = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 8 & 3 \\ 12 & 29 & 20 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   En déduire le nombre de codes de 4 lettres reconnus par le graphe.
   Quels sont ces codes ?

Partie B



Antoine décide d'aller visiter neuf châteaux de la Loire.
Il a construit le graphe ci-dessus où les sommets représentent :

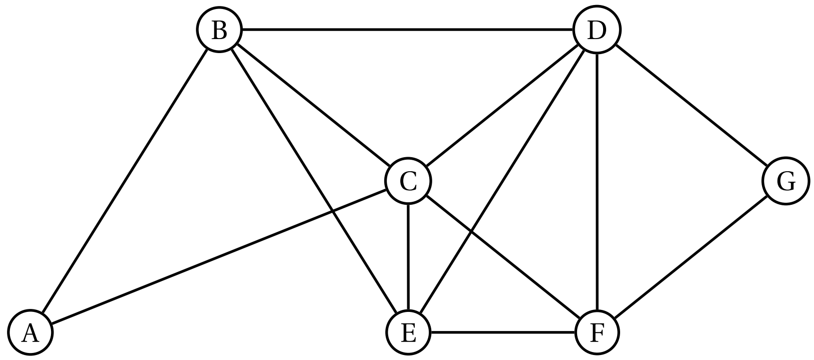
A : Amboise	B : Blois	C : Cheverny	D : Chambord	E : Chenonceau
T : Tours	V : Villandry	R : Azay-le-Rideau	N : Chinon	

Sur les arêtes sont indiquées les distances en kilomètres.

1. Antoine peut-il partir de Blois et y revenir, en parcourant une et une seule fois chacune des routes matérialisées par les arêtes de ce graphe ? On justifiera la réponse.
2. Déterminer le plus court chemin pour aller du château de Chambord au château de Chinon. On donnera le parcours ainsi que le nombre total de kilomètres.

60 Extrait de la session « Centres étrangers », 12 juin 2013

Dans le graphe ci-dessous, les sommets représentent différentes zones de résidence ou d'activités d'une municipalité. Une arête reliant deux de ces sommets indique l'existence d'une voie d'accès principale entre deux lieux correspondants.

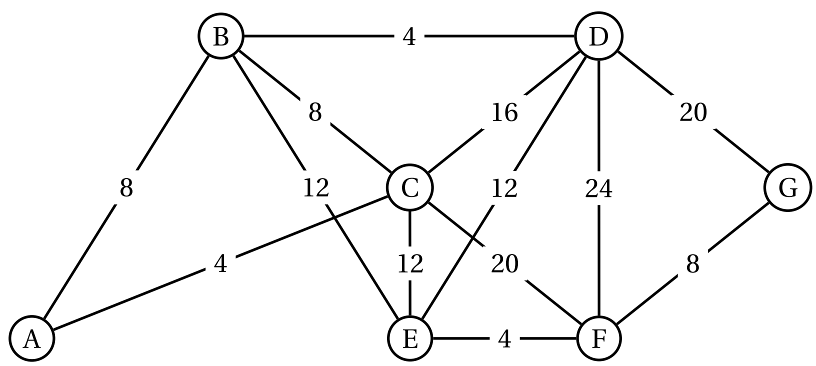


1. Donner, sans justifier, le degré de chacun des sommets (la réponse pourra être présentée sous forme de tableau où les sommets seront mis dans l'ordre alphabétique).
2. **a.** Donner la matrice M associée au graphe (les sommets seront mis dans l'ordre alphabétique).

   b. On donne la matrice $M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 & 5 & 5 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 12 & 13 & 12 & 8 & 5 \\ 8 & 12 & 12 & 15 & 13 & 13 & 5 \\ 5 & 13 & 15 & 12 & 13 & 12 & 8 \\ 5 & 12 & 13 & 13 & 10 & 12 & 5 \\ 5 & 8 & 13 & 12 & 12 & 8 & 7 \\ 3 & 5 & 5 & 8 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

   Déterminer, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant A et F puis donner leur liste.
3. Pour sa campagne électorale, un candidat souhaite parcourir toutes les voies d'accès principales de ce quartier sans emprunter plusieurs fois la même voie.

   Montrer qu'un tel parcours est possible.
4. Dans le graphe ci-dessous, les valeurs indiquent, en minutes, les durées moyennes des trajets entre les différents lieux via les transports en commun.



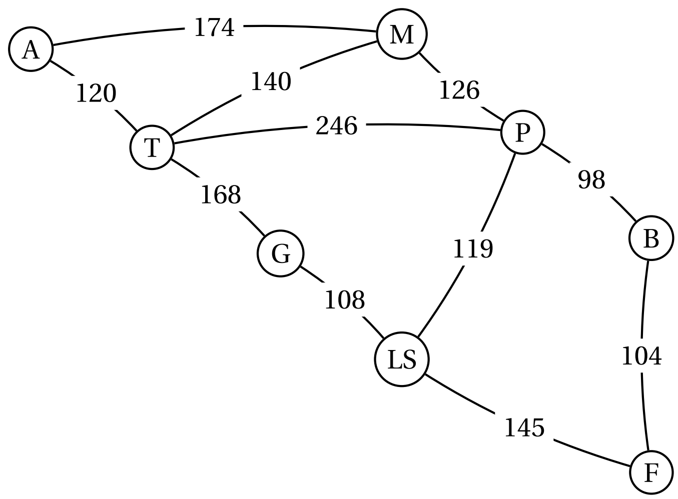
   Ce même candidat se trouve à la mairie (A) quand on lui rappelle qu'il a un rendez-vous avec le responsable de l'hôpital situé en zone G.

   a. En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer le chemin de durée minimale que ce candidat devra emprunter pour arriver à son rendez-vous.

   b. Combien de temps faut-il prévoir pour effectuer ce trajet ?

61 Extrait de la session « Métropole », 21 juin 2013

Un chauffeur-livreur réside en Italie dans la ville d'Aoste.
Quatre fois par mois, son employeur l'envoie livrer du matériel informatique dans la ville de Florence.
Il est établi que le trajet en camion coûte, en carburant, 0,51 euro au kilomètre. Le chauffeur dispose d'un budget mensuel de 2 200 euros pour son carburant. Ce qu'il réussit à économiser lui permet de toucher une prime P équivalente en fin de mois.
Il consulte donc la carte routière ci-dessous pour optimiser ses trajets.
Le graphe ci-dessous indique les distances entre différentes villes d'Italie : Aoste, Milan, Parme, Turin, Gènes, La Spézia, Bologne et Florence. Chaque ville est désignée par son initiale.



Les deux parties sont indépendantes.

Partie A : étude du trajet

1. Déterminer le trajet le plus court entre Aoste et Florence. (On indiquera les villes parcourues et l'ordre de parcours).
2. Déterminer le budget carburant nécessaire aux quatre voyages aller-retour du mois (le résultat sera arrondi à l'euro près).
   En déduire le montant de la prime P qui lui sera versée en fin de mois, à l'euro près.

Partie B : traversée de Parme

Durant son trajet, le chauffeur est obligé de traverser Parme et ses très nombreux feux tricolores. Lorsque le feu est orange, le chauffeur se comporte comme lorsqu'il est rouge, il s'arrête.
L'expérience lui a permis d'établir que s'il se présente à un feu, il se produit les évènements suivants :

- arrivé au feu, celui-ci est au vert (V) : la probabilité que le suivant soit vert est de 0,85 ;
- arrivé au feu, celui-ci est orange ou rouge (R) : la probabilité que le suivant soit vert est de 0,30.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste.
2. Indiquer la matrice de transition M du graphe, en considérant les sommets dans l'ordre (V, R) en ligne comme en colonne.
3. Le premier feu rencontré est vert. La matrice P_1 donnant l'état initial est donc $\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$.
   a. Déterminer les matrices $P_2 = P_1 \times M$ et $P_3 = P_2 \times M$. (Le détail des calculs n'est pas demandé.)
   b. Conclure quant à la probabilité p de l'évènement « le chauffeur doit s'arrêter au troisième feu ».

62 Extrait de la session « Métropole », 21 juin 2013 (sujet dévoilé)

Dans une entreprise, la société de débit boisson CAFTHÉ installe deux machines : l'une ne sert que du café et l'autre ne sert que du thé.
Chaque jour lors de la pause déjeuner, chaque employé de l'entreprise choisit une boisson, et une seule : café ou thé.
On suppose que le nombre total d'employés de l'entreprise reste constant au cours du temps.
La société CAFTHÉ pense que la machine à café sera toujours la plus utilisée.
Une enquête, effectuée sur plusieurs jours, auprès des employés pour connaitre leurs choix de boisson a montré que :

- 97 % des employés qui choisissent un café un jour donné prennent encore un café le lendemain ;
- 98 % des employés qui choisissent un thé un jour donné prennent encore un thé le lendemain.

On admet que cette tendance se poursuit les jours suivants.

Le premier jour, 70 % des employés ont choisi un café.
On note C l'état « l'employé choisit un café » et T l'état « l'employé choisit un thé ».
Pour tout entier naturel n non nul, on note :

- c_n la probabilité de l'évènement « un employé, pris au hasard, choisit un café le jour n » ;
- t_n la probabilité de l'évènement « un employé, pris au hasard, choisit un thé le jour n » ;
- P_n la matrice $\begin{pmatrix} c_n & t_n \end{pmatrix}$ correspondant à l'état probabiliste le jour n.

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets C et T.

2. Déterminer la matrice P_1 donnant l'état probabiliste le premier jour.

3. La matrice de transition M de ce graphe, en considérant les sommets dans l'ordre C et T, est :

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}97 & 0{,}03 \\ 0{,}02 & 0{,}98 \end{pmatrix}$$

Déterminer la probabilité, arrondie au centième, qu'un employé choisisse un thé le quatrième jour.

4. **a.** Montrer que l'état stable est $\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

b. Est-ce que la société CAFTHÉ avait raison quant à l'utilisation de la machine à café à long terme ?

5. **a.** Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n.
En déduire que pour tout entier n, on a $c_{n+1} = 0{,}95 \times c_n + 0{,}02$.

b. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	A est un réel
	i et n sont des entiers naturels
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	Affecter à A la valeur 0,70
Traitement :	Pour i de 1 à n
	Affecter à A la valeur $0{,}95 \times A + 0{,}02$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher A

En faisant apparaître les différentes étapes, donner la valeur affichée par cet algorithme lorsque la valeur de n est égale à 3.
Que permet de déterminer cet algorithme ?

63 Extrait de la session « Polynésie », 4 septembre 2013

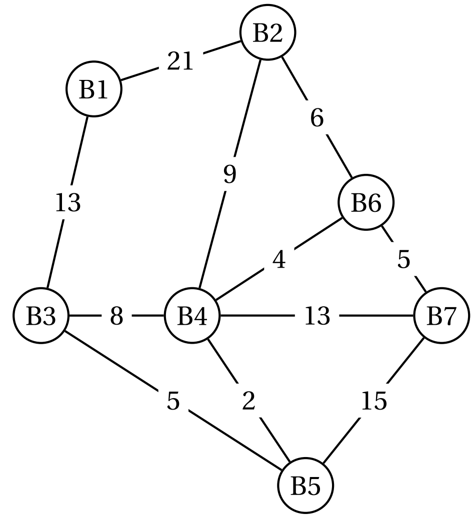
Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Un club sportif organise une course d'orientation. Sept postes de contrôle (appelés balises) sont prévus.

Les sept balises notées B1, B2, ... , B7 sont représentées sur le graphe ci-contre.

Les arêtes du graphe représentent les chemins possibles entre les balises et sur chaque arête est indiqué le temps de parcours estimé en minutes.



1. **a.** Le graphe est-il connexe ? Justifier la réponse.
   b. Existe-t-il un parcours qui permet de revenir à une balise de départ en passant une et une seule fois par tous les chemins ? Justifier la réponse.
   c. Existe-t-il un parcours qui permet de relier deux balises différentes en passant une et une seule fois par tous les chemins ?
2. Les organisateurs décident de situer le départ à la balise B1 et l'arrivée à la balise B7. Chaque participant doit rallier la balise B7 en un minimum de temps. Ils ne sont pas tenus à emprunter tous les chemins.
   Quelle est la durée minimale du parcours possible et quel est ce parcours ? Justifier votre réponse à l'aide d'un algorithme.

Partie B

Depuis l'année 2011, ce club sportif propose à ses licenciés une assurance spécifique. La première année, 80 % des licenciés y ont adhéré. En 2012, 70 % des licenciés ayant adhéré en 2011 ont conservé cette assurance et 60 % de ceux n'ayant pas adhéré en 2011 ont adhéré en 2012.
En supposant que cette évolution se maintienne, le club sportif souhaite savoir quel pourcentage de licenciés adhèrera à cette assurance à plus long terme.
On note A : « le licencié est assuré » et B : « le licencié n'est pas assuré ».
Pour tout entier n non nul, l'état probabiliste du nombre d'assurés l'année $2011+n$ est défini par la matrice ligne $P_n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \end{pmatrix}$ où x_n désigne la probabilité pour un licencié d'être assuré l'année $2011+n$.

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
2. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en prenant les sommets A et B dans cet ordre.
3. En remarquant que $P_0 = (0{,}8 \quad 0{,}2)$, déterminer P_1.
   Interpréter ce résultat.
4. Le club sportif maintiendra son offre d'assurance spécifique si le nombre d'assurés reste supérieur à 55 %.
   L'évolution prévue lui permet-elle d'envisager le maintien de son offre à long terme ?

64 Extrait de la session « Antilles–Guyane », 12 septembre 2013

Une entreprise de produits cosmétiques fait réaliser une étude marketing sur une population donnée.

Cette étude montre que lors de la sortie d'une nouvelle crème hydratante, la probabilité qu'une cliente l'achète lors de la première vente promotionnelle est de 0,2.
De plus, lorsqu'une cliente a acheté une crème hydratante lors d'une vente promotionnelle, la probabilité qu'elle en achète à nouveau lors de la vente promotionnelle suivante est de 0,8. Lorsqu'une cliente n'a pas acheté de crème hydratante, la probabilité pour qu'elle en achète à la vente promotionnelle suivante est de 0,3.

n étant un entier naturel non nul, on note :

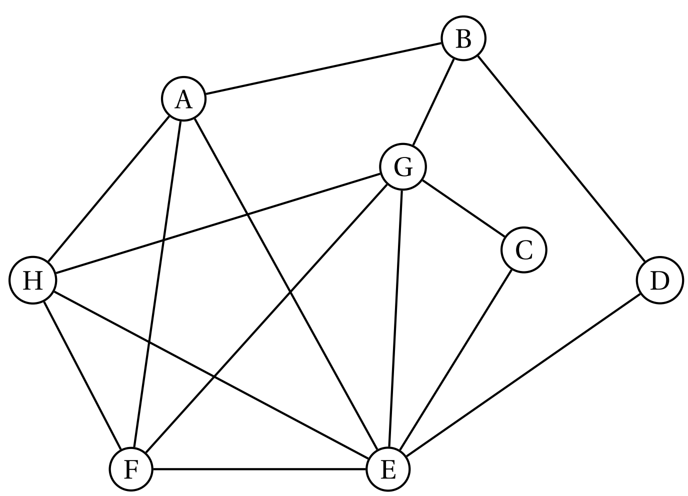
- a_n la probabilité qu'une cliente achète une crème hydratante lors de la n-ième vente promotionnelle.
- b_n la probabilité qu'une cliente n'achète pas une crème hydratante lors de la n-ième vente promotionnelle.
- $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste à la n-ième vente promotionnelle.

1. **a.** Déterminer P_1.

   b. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets :

   V quand il y a achat ;
   $\overline{V}$ quand il n'y a pas achat.
2. **a.** Écrire la matrice M de transition associée à ce graphe.

   b. Calculer P_2 et P_3.
   D'après ces résultats, quel est l'effet de ces trois premières ventes promotionnelles ?
3. Justifier qu'il existe un état stable $P = (a \quad b)$ pour cette situation.
   Le déterminer.
4. L'étude marketing montre que certains produits ne sont jamais achetés simultanément.
   On représente les incompatibilités par le graphe suivant, où deux sommets reliés représentent deux produits qui ne sont jamais dans une même commande. Par exemple, les produits A et B, représentés par des sommets reliés, ne sont jamais dans une même commande.



   L'entreprise souhaite répartir les produits dans des lots constitués de produits ne présentant aucune incompatibilité d'achat.
   Combien de lots doit-elle prévoir au minimum ? Justifier votre réponse à l'aide d'un algorithme et proposer une répartition des produits.

65 Extrait de la session « Métropole, La Réunion », 13 septembre 2013

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Un lycée d'une grande ville de province organise un forum des grandes écoles de la région pour aider ses élèves dans leurs choix d'orientation post-bac.

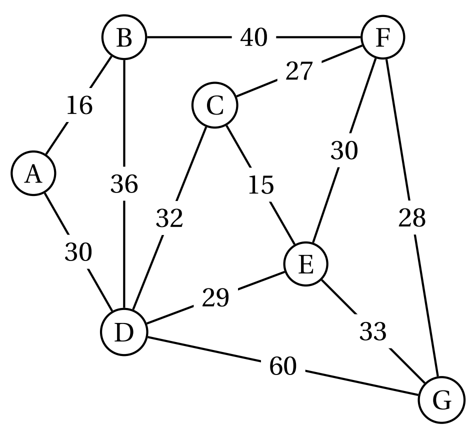
PARTIE A

Une des écoles a effectué une étude sur la mobilité des étudiants de la promotion de 2008 en ce qui concerne les choix de carrière.
Elle a relevé qu'en 2008, à la fin de leurs études, 25 % des diplômés sont partis travailler à l'étranger alors que le reste de la promotion a trouvé du travail en France.
On a observé ensuite qu'à la fin de chaque année, 20 % des personnes ayant opté pour l'étranger reviennent sur un poste en France alors que 10 % des personnes travaillant en France trouvent un poste à l'étranger. On considère que cette situation perdure.
On note $P_n = (e_n \quad l_n)$ la matrice correspondant à l'état probabiliste en $2008+n$, avec e_n la probabilité que la personne travaille à l'étranger, l_n celle qu'elle travaille en France.
Ainsi $P_0 = (0{,}25 \quad 0{,}75)$.

1. Proposer le graphe probabiliste associé à cette situation. On désignera par E (étranger) et F (France) les deux sommets.
2. Donner la matrice de transition M associée en prenant les sommets dans l'ordre E puis F.
3. Montrer qu'en 2011, la proportion des étudiants de la promotion 2008 travaillant à l'étranger est de 30,475 %.
4. Déterminer l'état stable du graphe probabiliste et interpréter le résultat obtenu.

PARTIE B

Pour clôturer cette journée, un groupe de lycéens musiciens a décidé d'organiser un concert.
Ils décident de faire le tour de tous les lycées de la ville et de distribuer des prospectus sur le trajet pour faire de la publicité pour cette soirée.
Les membres du groupe ont établi le graphe ci-contre.
Les sommets représentent les différents lycées et les arêtes, les rues reliant les établissements.
Les arêtes sont pondérées par les durées des trajets entre deux sommets consécutifs, exprimées en minutes.



1. Existe-t-il un trajet d'un lycée à un autre permettant de parcourir toutes les rues une fois et une seule ?
   Si oui, donner un tel trajet, si non expliquer pourquoi.
2. Arrivé en retard au lycée A, un membre du groupe veut trouver le chemin le plus rapide pour rejoindre ses camarades au lycée G.
   Quel trajet peut-il prendre ?
   Quelle est alors la durée du parcours ?

66 Extrait de la session « Amérique du Sud », 21 novembre 2013

Une étude est réalisée chaque hiver sur une population composée de personnes qui peuvent pratiquer le ski de piste ou le snowboard.
L'étude révèle que :

- si une personne pratique le ski de piste, alors la probabilité qu'elle pratique le snowboard l'hiver suivant est égale à 0,2.
- si une personne pratique le snowboard, alors la probabilité qu'elle pratique le ski de piste l'hiver suivant est égale à 0,3.

On note S l'état : « la personne pratique le ski de piste » et $\overline{S}$ l'état : « la personne pratique le snowboard ».
On note également pour tout entier naturel n :

- p_n la probabilité qu'une personne pratique le ski de piste lors du n-ième hiver ;
- q_n la probabilité qu'une personne pratique le snowboard lors du n-ième hiver ;
- $P_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste du système lors du n-ième hiver.

On suppose que la population initiale ne comporte que des personnes pratiquant le ski de piste, on a donc l'égalité $P_0 = (1 \quad 0)$.

Partie A

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets S et $\overline{S}$.
2. **a.** Donner la matrice de transition M de ce graphe probabiliste.

   b. Calculer M^2.

   c. Déterminer l'état probabiliste P_2 .
3. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $p_{n+1} = 0{,}5\,p_n + 0{,}3$.
4. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	
1	J et N sont des entiers naturels
2	p est un nombre réel
Entrée :	
3	Saisir N
Initialisation :	
4	p prend la valeur 1
Traitement :	
5	Pour J allant de 1 à N
6	p prend la valeur ....
7	Fin Pour
Sortie :	
8	Afficher p

Recopier et compléter la ligne 6 de cet algorithme afin d'obtenir la probabilité p_N .

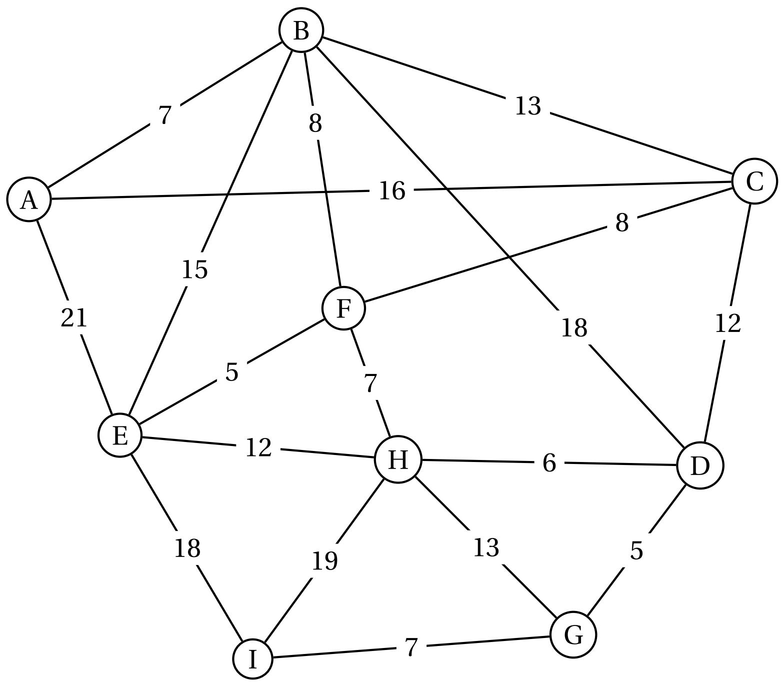
Partie B

On considère, pour tout entier naturel n, l'évènement S_n : « la personne pratique le ski de piste lors du n-ième hiver ».
La probabilité de l'évènement S_n est notée $p(S_n)$. On a donc $p_n = p(S_n)$.
On sait d'après la **partie A** que pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0{,}5\,p_n + 0{,}3$.
Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = p_n - 0{,}6$.

1. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5 et préciser la valeur de u_0.
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n puis l'expression de p_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite $\left(p_n\right)$ et interpréter le résultat.

Partie C

Une partie du domaine skiable est représentée par le graphe ci-dessous.
Le sommet A représente le haut des pistes de ski et le sommet I en représente le bas.
Les sommets B, C, D, E, F, G et H représentent des points de passages.
Chacune des arêtes est pondérée par la distance, en centaine de mètres, entre deux sommets.



Déterminer, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, la distance minimale permettant de relier le sommet A au sommet I.

67 Extrait de la session « Nouvelle-Calédonie », 18 novembre 2013

Dans la commune de Girouette, deux partis s'affrontent aux élections tous les ans.
En 2010, le parti Hirondelle l'a emporté avec 70 % des voix contre 30 % au parti Phénix.
On admet qu'à partir de l'année 2010 :

- 14 % des électeurs votant pour le parti Hirondelle à une élection voteront pour le parti Phénix à l'élection suivante.
- 6 % des électeurs votant pour le parti Phénix à une élection voteront pour le parti Hirondelle à l'élection suivante.
- Les autres ne changent pas d'avis.

On considère un électeur de Girouette choisi au hasard.
On note H l'état « l'électeur vote pour le parti Hirondelle » et P l'état « l'électeur vote pour le parti Phenix ».

1. **a.** Représenter le graphe probabiliste associé à cette situation.

   b. Déterminer la matrice de transition M en considérant les états dans l'ordre alphabétique.
2. On appelle $E_n = \begin{pmatrix} h_n & p_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste de l'année $2010 + n$.
   On a donc $E_0 = (0{,}7 \quad 0{,}3)$.
   Déterminer E_1 et E_4. (On arrondira les coefficients de E_4 au centième). Interpréter les résultats.
3. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $h_{n+1} = 0{,}8\,h_n + 0{,}06$.

   b. On définit la suite (u_n) par : pour tout entier naturel n, $u_n = h_n - 0{,}3$.
   Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique.

   c. Montrer que pour tout entier naturel n, $h_n = 0{,}3 + 0{,}4 \times 0{,}8^n$.
4. À partir de combien d'années la probabilité qu'un électeur choisi au hasard vote pour le parti Hirondelle sera-t-elle strictement inférieure à 0,32 ?

68 Extrait de la session « Pondichéry », 7 avril 2014

Les parties A et B sont indépendantes.

Deux sociétés, Ultra-eau (U) et Vital-eau (V), se partagent le marché des fontaines d'eau à bonbonnes dans les entreprises d'une grande ville.

Partie A

En 2013, l'entreprise U avait 45 % du marché et l'entreprise V le reste. Chaque année, l'entreprise U conserve 90 % de ses clients, les autres choisissent l'entreprise V. Quant à l'entreprise V, elle conserve 85 % de ses clients, les autres choisissent l'entreprise U.
On choisit un client au hasard tous les ans et on note pour tout entier naturel n :

- u_n la probabilité qu'il soit un client de l'entreprise U l'année $2013+n$, ainsi $u_0 = 0{,}45$;
- v_n la probabilité qu'il soit un client de l'entreprise V l'année $2013+n$.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets U et V.
2. Donner v_0, calculer u_1 et v_1.
3. On considère l'algorithme (incomplet) donné en annexe. Celui-ci doit donner en sortie les valeurs de u_n et v_n pour un entier naturel n saisi en entrée.
   Compléter les lignes (L5) et (L8) de l'algorithme pour obtenir le résultat attendu.
4. On admet que, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}75\,u_n + 0{,}15$.
   On note, pour tout nombre entier naturel n, $w_n = u_n - 0{,}6$.
   a. Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison 0,75.
   b. Quelle est la limite de la suite (w_n) ?
   En déduire la limite de la suite (u_n).
   Interpréter le résultat dans le contexte de cet exercice.

Partie B

L'entreprise U fournit ses clients en recharges pour les fontaines à eau et dispose des résultats antérieurs suivants :

Nombre de recharges en milliers	1	3	5
Coût total annuel de production en centaines d'euros	11	27,4	83

Le coût total de production est modélisé par une fonction C définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,10]$ par :

$$C(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + 10 \qquad a,\ b \text{ et } c \text{ sont des nombres réels.}$$

Lorsque le nombre x désigne le nombre de milliers de recharges produites, $C(x)$ est le coût total de production en centaines d'euros.

On admet que le triplet (a, b, c) est solution du système (S) $\left\{\begin{array}{l} a+b+c=1 \\ 27\,a+9\,b+3\,c=17{,}4 \\ 125\,a+25\,b+5\,c=73 \end{array}\right.$ et on pose $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

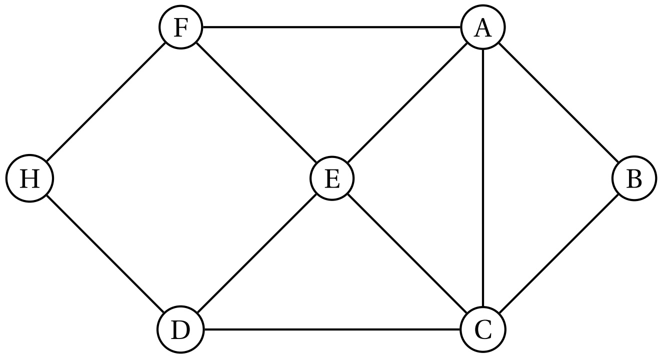
1. **a.** Écrire ce système sous la forme $MX = Y$ où M et Y sont des matrices que l'on précisera.
   b. On admet que la matrice M est inversible. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le triplet (a,b,c) solution du système (S).
2. En utilisant cette modélisation, quel serait le coût total annuel de production pour 8 000 recharges d'eau produites ?

Annexe
Recopier sur la copie la partie « traitement » (lignes L3 à L9) en complétant les lignes L5 et L8.

Variables :	N est un nombre entier naturel non nul	L1
	U et V sont des nombres réels	L2
Traitement :	Saisir une valeur pour N	L3
	Affecter à U la valeur 0,45	L4
	Affecter à V la valeur	L5
	Pour i allant de 1 jusqu'à N	L6
	| affecter à U la valeur $0,9 \times U + 0,15 \times V$	L7
	| affecter à V la valeur	L8
	Fin Pour	L9
Sortie :	Afficher U et Afficher V	L10

69 Extrait de la session « Liban », 27 mai 2014

On a schématisé ci-dessous le plan d'une MJC (Maison de la Jeunesse et de la Culture) par un graphe dont les sommets sont les salles et les arêtes sont les passages (portes, couloirs ou escaliers) entre les salles. On appelle H le hall d'entrée et B le bureau du directeur.

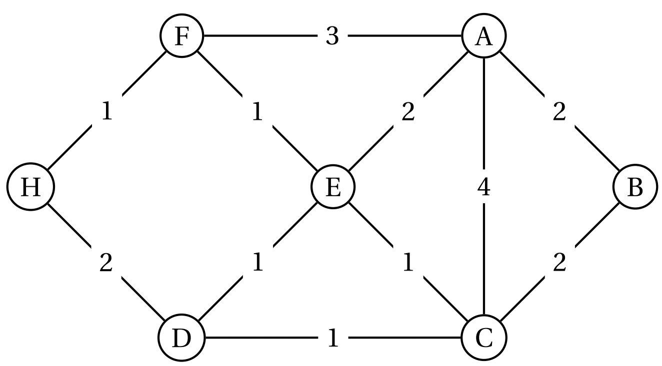


En fin de journée, un agent de service fait le tour de la MJC pour récupérer dans chaque salle (bureau du directeur et hall inclus) les objets oubliés par les enfants.

1. Préciser si ce graphe est connexe en justifiant la réponse.
2. Déterminer, en justifiant, si l'agent de service peut passer par toutes les salles en utilisant une fois et une seule chaque passage.
3. On range les sommets par ordre alphabétique.
   Donner la matrice d'adjacence M associée au graphe.
4. On donne :

$$M^4 = \begin{pmatrix} 31 & 15 & 26 & 21 & 27 & 18 & 12 \\ 15 & 12 & 15 & 12 & 18 & 12 & 6 \\ 26 & 15 & 31 & 18 & 27 & 21 & 12 \\ 21 & 12 & 18 & 20 & 17 & 18 & 5 \\ 27 & 18 & 27 & 17 & 34 & 17 & 16 \\ 18 & 12 & 21 & 18 & 17 & 20 & 5 \\ 12 & 6 & 12 & 5 & 16 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

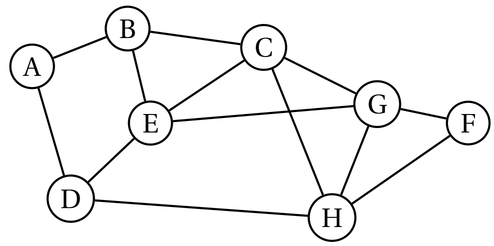
   En déduire le nombre de chemins de longueur 4 entre les sommets B et H.
5. On a indiqué sur le graphe ci-dessous le temps en minute mis pour passer entre les différentes salles en ouvrant et fermant les portes à clé.



   À l'aide d'un algorithme, déterminer le temps minimal pour aller de B à H.
   Déterminer ce temps.

70 Extrait de la session « Amérique du Nord », 30 mai 2014

Lors d'une campagne électorale, un homme politique doit effectuer une tournée dans les villes A, B, C, D, E, F, G et H, en utilisant le réseau autoroutier.
Le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous, représente les différentes villes de la tournée et les tronçons d'autoroute reliant ces villes (une ville est représentée par un sommet, un tronçon d'autoroute par une arête) :

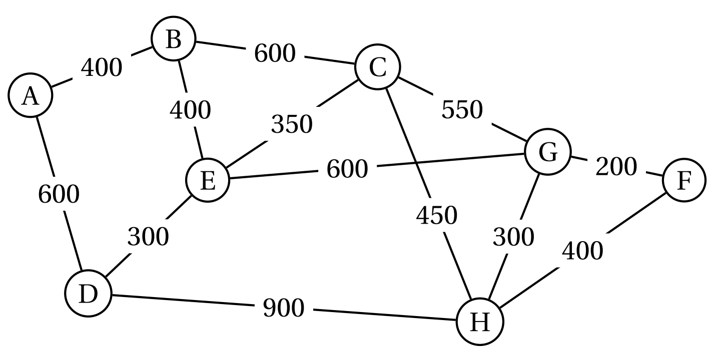


Partie A

1. Déterminer, en justifiant, si le graphe $\mathcal{G}$ est :
   a. complet ;
   b. connexe.
2. a. Justifier qu'il est possible d'organiser la tournée en passant au moins une fois par chaque ville, tout en empruntant une fois et une seule chaque tronçon d'autoroute.
   b. Citer un trajet de ce type.
3. On appelle M la matrice d'adjacence associée au graphe $\mathcal{G}$ (les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique).
   a. Déterminer la matrice M.
   b. On donne la matrice $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 5 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 7 & 2 & 8 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 6 & 4 & 9 & 3 & 9 & 10 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 9 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 8 & 9 & 9 & 4 & 4 & 10 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 4 & 2 & 6 & 6 \\ 4 & 3 & 9 & 3 & 10 & 6 & 6 & 9 \\ 1 & 5 & 10 & 8 & 4 & 6 & 9 & 4 \end{pmatrix}$.
   Déterminer, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant E à H.
   Préciser ces chemins.

Partie B

Des contraintes d'organisation obligent cet homme politique à se rendre dans la ville F après la ville A.
Le graphe $\mathcal{G}$ est complété ci-dessous par les longueurs en kilomètre de chaque tronçon d'autoroute.

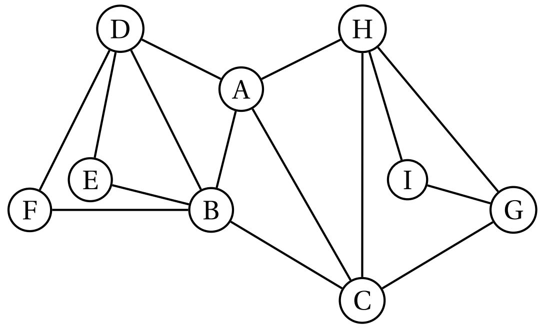


Déterminer, en utilisant l'algorithme de Dijkstra, le trajet autoroutier le plus court pour aller de A à F.
Préciser la longueur en kilomètre de ce trajet.

71 Extrait de la session « Centres étrangers », 12 juin 2014

Partie A : Étude d'un graphe

On considère le graphe $\mathscr{G}$ ci-dessous.



1. **a.** Déterminer en justifiant si le graphe $\mathscr{G}$ est complet.

   b. Déterminer en justifiant si le graphe $\mathscr{G}$ est connexe.

2. **a.** Donner le degré de chacun des sommets du graphe $\mathscr{G}$.

   b. Déterminer en justifiant si le graphe $\mathscr{G}$ admet un cycle eulérien ou une chaîne eulérienne.

3. **a.** Donner la matrice M associée au graphe $\mathscr{G}$ (les sommets seront rangés dans l'ordre alphabétique).

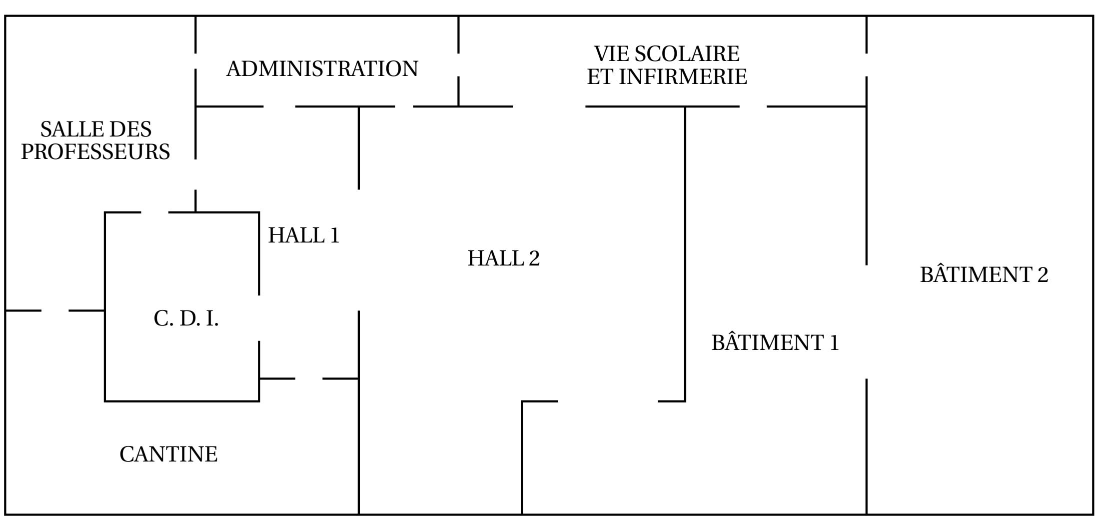
   b. On donne : $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   Montrer, par le calcul, que le coefficient de la septième ligne et quatrième colonne de la matrice M^3 est égal à 3.

Partie B : Applications

Dans cette partie, on pourra justifier les réponses en s'aidant de la partie A.

On donne ci-dessous le plan simplifié d'un lycée.



1. Le graphe $\mathscr{G}$ donné en partie A modélise cette situation.

Recopier et compléter le tableau suivant :

Sommet du graphe $\mathscr{G}$	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Lieu correspondant dans le lycée									

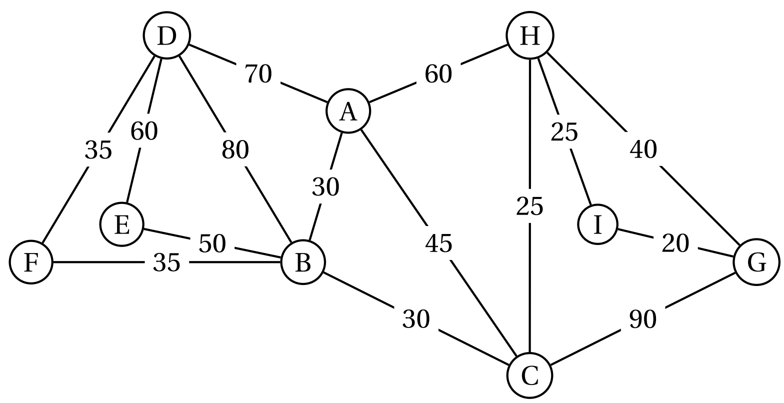
2. Un élève a cours de mathématiques dans le bâtiment 1. À la fin du cours, il doit rejoindre la salle des professeurs pour un rendez-vous avec ses parents.

Déterminer le nombre de chemins en trois étapes permettant à l'élève de rejoindre ses parents puis indiquer quels sont ces chemins.

3. Le lycée organise une journée portes-ouvertes.

a. Déterminer, en justifiant, s'il est possible de visiter le lycée en empruntant une seule fois chaque passage entre les différents lieux.

b. Sur les arêtes du graphe $\mathscr{G}$ sont indiqués les temps de parcours exprimés en seconde entre deux endroits du lycée.



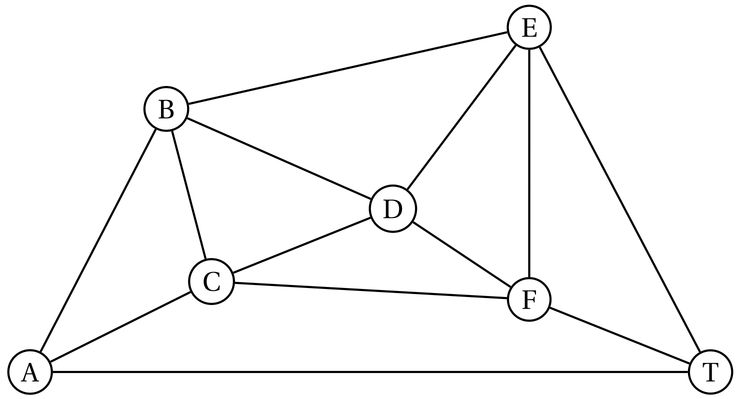
Déterminer, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, le chemin permettant de relier le sommet G au sommet D en un temps minimal.

Déterminer ce temps minimal, exprimé en seconde.

72 Extrait de la session « Polynésie », 13 juin 2014

Partie A

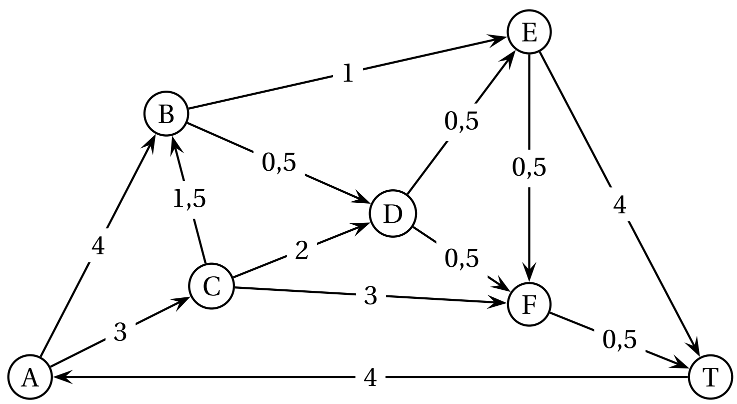
Le graphe ci-dessous représente, dans un aéroport donné, toutes les voies empruntées par les avions au roulage. Ces voies, sur lesquelles circulent les avions avant ou après atterrissage, sont appelées *taxiways*.
Les arêtes du graphe représentent les voies de circulation (les taxiways) et les sommets du graphe sont les intersections.



1. Déterminer le nombre de voies de circulation au total.
2. Afin que l'aéroport soit déneigé le plus rapidement possible, est-il possible de planifier un parcours pour que les chasse-neige passent par toutes les voies sans emprunter plusieurs fois la même route ? Justifier la réponse et donner un tel parcours.

Partie B

Dans le graphe ci-dessous, on a indiqué le sens de circulation pour les avions dans les différentes voies ainsi que le temps de parcours pour chacune en minute(s).



1. **a.** Écrire la matrice M associée à ce graphe (ranger les sommets dans l'ordre alphabétique).

   b. Citer tous les chemins de longueur 3 reliant A à T.
2. L'avion qui a atterri est en bout de piste en A et doit se rendre le plus rapidement possible au terminal situé au point T.

   Déterminer l'itinéraire le plus rapide et en donner la durée.

73 Extrait de la session « Antilles–Guyane », 19 juin 2014

Les services commerciaux d'une grande surface de produits alimentaires ont défini un profil de client qui a été appelé « consommateur bio ».

Sur la base d'observations réalisées les années précédentes, il a été constaté que :

- 90 % des clients « consommateur bio » maintenaient cette pratique l'année suivante ;
- 15 % des clients n'ayant pas le profil de « consommateur bio » entraient dans la catégorie « consommateur bio » l'année suivante.

On suppose que cette évolution se poursuit d'une année à l'autre à partir de 2013, année au cours de laquelle il a été constaté que 20 % des clients ont le profil « consommateur bio ».
Par un tirage aléatoire effectué tous les ans, on choisit un client de cette grande surface.
Pour tout nombre entier naturel n on note :

- b_n la probabilité que le client choisi lors de l'année $2013+n$ soit un « consommateur bio » ;
- c_n la probabilité que le client choisi lors de l'année $2013+n$ ne soit pas un « consommateur bio » ;
- P_n la matrice ligne $\begin{pmatrix} b_n & c_n \end{pmatrix}$ donnant l'état probabiliste lors de l'année $2013+n$.

1. **a.** Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets B et C où B correspond à l'état « consommateur bio ».

b. Donner P_0 l'état probabiliste en 2013 et la matrice M de transition correspondant à ce graphe, les sommets B et C étant classés dans cet ordre.

c. On donne la matrice M^2 :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0{,}825 & 0{,}175 \\ 0{,}2625 & 0{,}7375 \end{pmatrix}$$

En précisant la méthode de calcul, déterminer la probabilité que le client choisi en 2015 soit un « consommateur bio ».

d. Déterminer l'état stable $(b\ c)$ du graphe probabiliste.

2. Le directeur du supermarché affirme que, dans un futur proche, plus de la moitié de sa clientèle aura le profil de « consommateur bio ».

a. Recopier et compléter l'algorithme suivant qui doit permettre de déterminer le nombre minimal d'années pour que l'affirmation du directeur soit vérifiée.

Variables :	N un nombre entier naturel non nul
	B un nombre réel
Traitement :	Affecter à N la valeur 0
	Affecter à B la valeur 0,2
	Affecter à C la valeur 0,8
	Tant que ...
	affecter à B la valeur $0{,}9\times B+0{,}15\times C$
	affecter à C la valeur $1-B$
	affecter à N la valeur $N+1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher ...

b. Déterminer le nombre minimal d'années recherché en expliquant la démarche.

74 Extrait de la session « Asie », 19 juin 2014

Partie A

Une entreprise E commande chaque semaine ses fournitures auprès de deux fournisseurs A et H.
Les constats faits les premières semaines conduisent à modéliser l'évolution du choix du fournisseur pour les commandes d'une semaine à l'autre par un graphe probabiliste de sommets A et H où :

- A désigne l'état : « la commande est passée auprès du fournisseur A » ;
- H désigne l'état : « la commande est passée auprès du fournisseur H ».

La matrice de transition M de ce graphe, en considérant les sommets dans l'ordre A et H, est $M = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$.

1. Dessiner le graphe probabiliste associé à la matrice M.
2. Donner la signification du nombre 0,95 dans la matrice M.

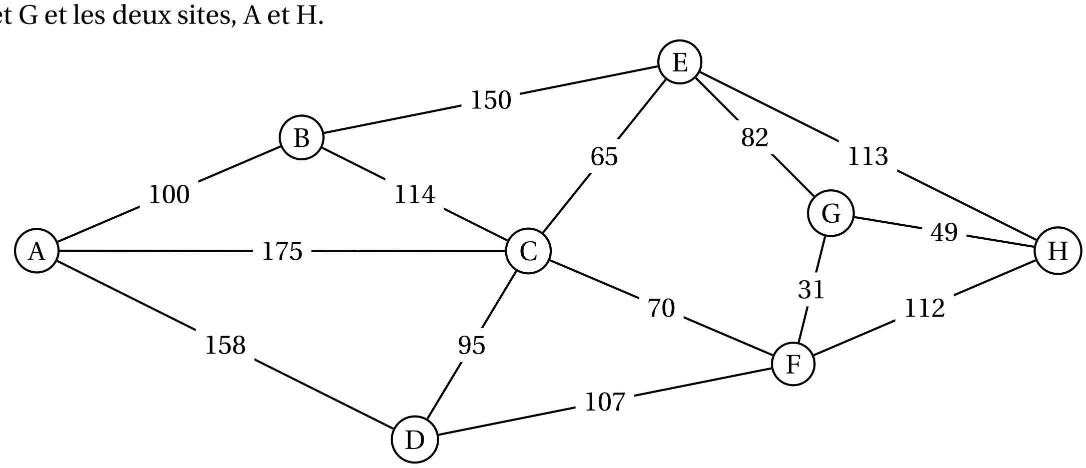
Pour tout entier naturel n, on note :

- a_n la probabilité de l'évènement : « la semaine n, l'entreprise E commande ses fournitures auprès du fournisseur A » ;
- h_n la probabilité de l'évènement : « la semaine n, l'entreprise E commande ses fournitures auprès du fournisseur H » ;
- P_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n & h_n \end{pmatrix}$ correspondant à l'état probabiliste pour la semaine n.

3. Vérifier que la matrice ligne $P = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$ correspond à l'état stable du système.
   En donner une interprétation.
4. On donne $P_0 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$ et on rappelle que $P_k = P_0 \times M^k$, pour k entier naturel.
   Déterminer la semaine où, pour la première fois, la probabilité que l'entreprise E commande ses fournitures auprès du fournisseur A dépasse la probabilité qu'elle les commande auprès du fournisseur H.

Partie B

Le directeur de l'entreprise E rend visite à ses fournisseurs, il se rend du fournisseur A au fournisseur H et souhaite effectuer le moins de kilomètres possible.
Son assistant dresse le graphe suivant qui schématise les trajets, en kilomètres, entre les six villes de la région, notées B, C, D, E, F et G et les deux sites, A et H.



Déterminer l'itinéraire le plus court reliant les deux sites A et H et indiquer le nombre de kilomètres à effectuer. Justifier la réponse.

75 Extrait de la session « Métropole », 20 juin 2014

Alice participe à une compétition de tir à l'arc ; elle effectue plusieurs lancers de flèches.
Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à 0,9.
Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, Alice se déconcentre et la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à 0,4.
On suppose qu'au premier lancer, elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer.
Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note :

- a_n la probabilité qu'Alice atteigne la cible au n-ième lancer ;
- b_n la probabilité qu'Alice manque la cible au n-ième lancer ;
- $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste au n-ième lancer.

1. **a.** Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B (A représentant l'état « Alice atteint la cible » et B l'état « Alice manque sa cible »).

b. Indiquer la matrice de transition M associée à ce graphe. On prendra les sommets A et B dans l'ordre (A, B).

c. Justifier que $P_1 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$ et $P_2 = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,35 \end{pmatrix}$.

2. **a.** Montrer que, pour tout nombre entier n strictement positif, $a_{n+1} = 0,9\,a_n + 0,4\,b_n$.

b. En déduire que, pour tout nombre entier n strictement positif, $a_{n+1} = 0,5\,a_n + 0,4$.

3. **a.** Compléter l'algorithme fourni en annexe 1 de façon à ce qu'il affiche l'état probabiliste au n-ième lancer.

b. Déterminer l'affichage de cet algorithme pour $n = 5$.

4. **a.** On considère la suite (u_n) définie pour tout nombre entier naturel n strictement positif par :

$$u_n = a_n - 0,8$$

Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. Donner l'expression de u_n en fonction de n, puis en déduire que, pour tout nombre entier naturel n strictement positif, $a_n = 0,8 - 0,3 \times 0,5^{n-1}$.

c. À long terme, que peut-on penser de la probabilité qu'Alice atteigne la cible ?

d. Par quelle autre méthode aurait-on pu trouver le résultat précédent ?

Annexe à rendre avec la copie

```
Entrées
            Saisir n
Traitement
            a prend la valeur 0,5
            b prend la valeur 0,5
            Pour i allant de 2 à n
               a prend la valeur ... × a + ...
               b prend la valeur 1 − a
            Fin Pour
Sortie
            Afficher a, b
```

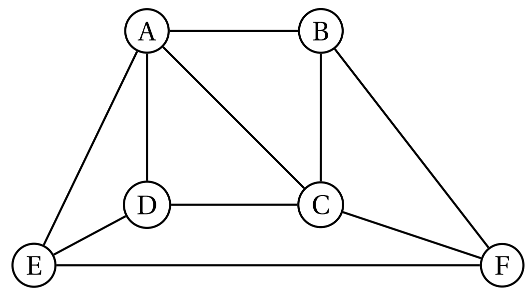
76 Extrait de la session « Polynésie », 10 septembre 2014

Partie A

Le graphe suivant représente le plan d'une ville.
Les arêtes du graphe représentent les principales avenues et les sommets du graphe les carrefours entre ces avenues.

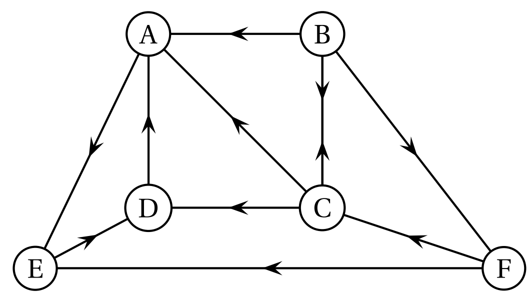
1. Donner l'ordre du graphe puis le degré de chacun des sommets.
2. Un piéton peut-il parcourir toutes ces avenues sans emprunter plusieurs fois la même avenue :
   - **a.** en partant d'un carrefour et en revenant à son point de départ ?
   - **b.** en partant d'un carrefour et en arrivant à un carrefour différent ?

   Les deux réponses seront justifiées.



Partie B

Dans le graphe ci-dessous, on a indiqué, pour cette même ville, le sens de circulation pour les véhicules sur les différentes avenues.



1. Peut-on trouver un trajet de longueur quelconque qui permet d'aller de D à B en respectant les sens de circulation ? Justifier la réponse.
2. Écrire la matrice M associée à ce graphe (on rangera les sommets dans l'ordre alphabétique).
3. On donne la matrice

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   - **a.** Que représentent les coefficients de cette matrice ?
   - **b.** Combien y-a-t-il de chemins de longueur 3 partant du carrefour B et arrivant en A ?
     Écrire tous ces chemins.
   - **c.** Combien y-a-t-il de chemins de longueur 3 arrivant au point E ? Expliquer la démarche.

77 Extrait de la session « Métropole », 12 septembre 2014

Pour satisfaire ses adhérents, un club de sport a instauré trois niveaux d'apprentissage :

DÉBUTANT (D), CONFIRMÉ (C) et EXPERT (E).

Au 1er septembre 2012, lors de l'inscription, le club comptait :

- 30 % de débutants ;
- 50 % de confirmés ;
- 20 % d'experts.

D'une année sur l'autre, on constate que :

- parmi les adhérents de niveau débutant, 40 % restent à ce niveau et 60 % passent au niveau confirmé ;
- parmi les adhérents de niveau confirmé, 60 % restent à ce niveau et 40 % passent au niveau expert ;
- parmi les adhérents de niveau expert, 80 % restent à ce niveau, 10 % redescendent au niveau confirmé et les autres 10 % préfèrent reprendre les bases au niveau débutant.

On considère qu'il n'y a pas de nouveaux venus ni de départs dans le club.

Soit $P_n = (d_n \quad c_n \quad e_n)$ la matrice ligne décrivant l'état probabiliste de la répartition parmi les trois niveaux d'apprentissage D, C et E au 1er septembre de l'année $2012 + n$ pour tout entier naturel n.

1. **a.** Donner sans justification la matrice P_0.

b. Traduire la situation par un graphe probabiliste de sommets D, C et E.
On donne la matrice carrée M de transition en respectant l'ordre D, C, E des sommets.

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}4 & \mathbf{0{,}6} & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & \mathbf{0{,}8} \end{pmatrix}$$

Dans la suite de l'exercice, on pourra utiliser les résultats suivants (résultats arrondis au millième) :

$$M^5 = \begin{pmatrix} 0{,}085 & 0{,}331 & 0{,}584 \\ 0{,}097 & 0{,}293 & 0{,}610 \\ 0{,}104 & 0{,}298 & 0{,}598 \end{pmatrix} \qquad M^{10} = \begin{pmatrix} 0{,}100 & 0{,}299 & 0{,}601 \\ 0{,}100 & 0{,}300 & 0{,}600 \\ 0{,}100 & 0{,}300 & 0{,}600 \end{pmatrix}$$

2. Dans cette matrice, on lit **0,6** et **0,8** en gras.

a. Préciser, à l'aide d'une phrase, à quoi correspondent ces deux valeurs en lien avec la situation étudiée.

b. Calculer P_1.

c. Déterminer la répartition prévisible, en pourcentages, des adhérents dans ce club de sport au 1er septembre 2017. Les résultats seront donnés à 0,1 % près.

3. **a.** En calculant P_{10}, émettre une conjecture sur la matrice P correspondant à l'état probabiliste stable.

b. Vérifier cette conjecture.

c. Quelle conclusion peut-on en tirer pour la répartition des adhérents ?

78 Extrait de la session « Amérique du Sud », 17 novembre 2014

La première semaine de l'année, le responsable de la communication d'une grande entreprise propose aux employés de se déterminer sur un nouveau logo, le choix devant être fait par un vote en fin d'année.
Deux logos, désignés respectivement par A et B, sont soumis au choix.
Lors de la présentation qui se déroule la première semaine de l'année, 24 % des employés sont favorables au logo A et tous les autres employés sont favorables au logo B.
Les discussions entre employés font évoluer cette répartition tout au long de l'année.
Ainsi 9 % des employés favorables au logo A changent d'avis la semaine suivante et 16 % des employés favorables au logo B changent d'avis la semaine suivante.

Pour tout n, $n \geqslant 1$, on note :

- a_n la probabilité qu'un employé soit favorable au logo A la semaine n ;
- b_n la probabilité qu'un employé soit favorable au logo B la semaine n ;
- P_n la matrice $(a_n \quad b_n)$ traduisant l'état probabiliste la semaine n.

On a donc, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n + b_n = 1$ et $P_1 = (0{,}24 \quad 0{,}76)$.

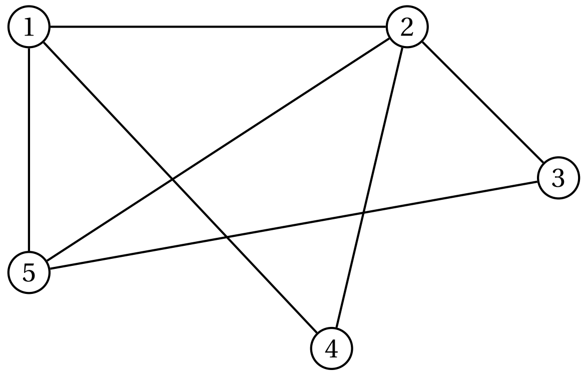
1. Traduire la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
2. Déterminer la matrice de transition M de ce graphe, en rangeant les sommets dans l'ordre alphabétique.
3. **a.** À l'aide de la relation $P_{n+1} = P_n \times M$, exprimer, pour tout $n \geqslant 1$, a_{n+1} en fonction de a_n et de b_n.
   b. En déduire que l'on a, pour tout $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = 0{,}75\,a_n + 0{,}16$.
4. À l'aide de la calculatrice, donner, sans justifier, la probabilité à 0,001 près qu'un employé soit favorable au logo A la semaine 4.
5. On note $P = (a \quad b)$ l'état stable de la répartition des employés.
   a. Déterminer un système de deux équations que doivent vérifier a et b.
   b. Résoudre le système obtenu dans la question précédente.
   c. On admet que l'état stable est $P = (0{,}64 \quad 0{,}36)$.
   Interpréter le résultat.
6. On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES :	A est un réel
	N est un entier naturel
INITIALISATION :	A prend la valeur 0,24
	N prend la valeur 0
TRAITEMENT :	Tant que $A < 0{,}639$
	N prend la valeur $N+1$
	A prend la valeur $0{,}75 \times A + 0{,}16$
	Fin du Tant que
SORTIE :	Afficher N

Préciser ce que cet algorithme permet d'obtenir (on ne demande pas de donner la valeur de N affichée).

79 Extrait de la session « Nouvelle-Calédonie », 17 novembre 2014

Un parc de loisirs propose à ses visiteurs des parcours d'accrobranches.
Les différents parcours sont modélisés par le graphe Γ ci-dessous où les sommets correspondent aux cinq arbres marquant leurs extrémités. Chaque parcours est représenté par une arête du graphe et peut être réalisé dans les deux sens.



1. L'organisateur du parc de loisirs souhaite que les visiteurs puissent, s'ils le souhaitent, réaliser un itinéraire complet d'accrobranches, c'est-à-dire un itinéraire empruntant une fois et une seule chaque parcours et en commençant cet itinéraire par l'arbre numéro 1.

   Justifier que ce souhait est réalisable et proposer un tel itinéraire.

2. On note M la matrice associée au graphe Γ en considérant les sommets pris dans l'ordre croissant des numéros d'arbres.

   a. Écrire la matrice M.

   b. On donne, ci-dessous, les matrices M^2 et M^3.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 3 & 5 & 7 \\ 7 & 6 & 6 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 3 \\ 7 & 7 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

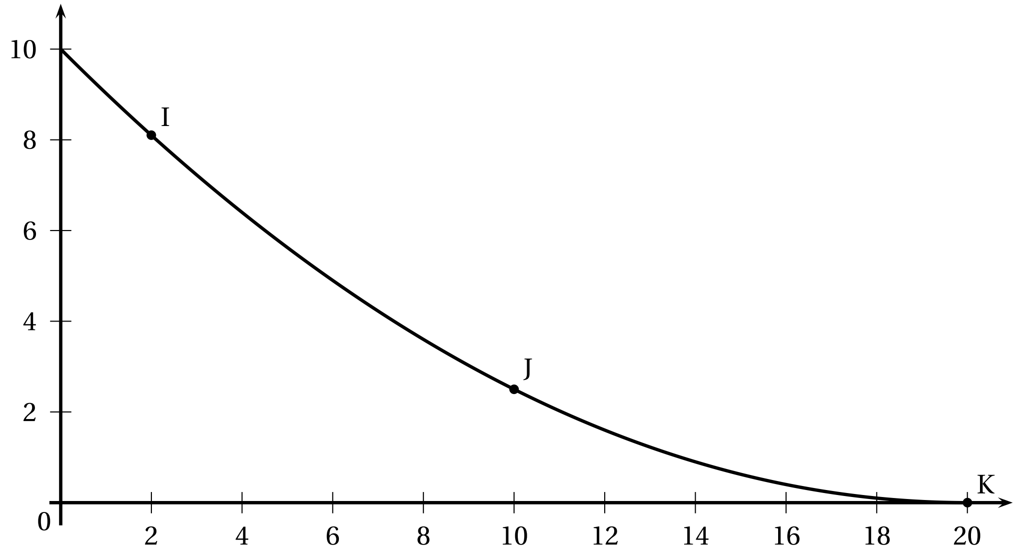
   L'organisateur du parc de loisir souhaite organiser des « itinéraires express » qui débuteront à l'arbre numéro 1, emprunteront trois parcours d'accrobranches et finiront à l'arbre 4. Ces itinéraires peuvent éventuellement emprunter plusieurs fois le même parcours.

   Déterminer, en justifiant votre résultat, le nombre « d'itinéraires express » réalisables.

   (On ne demande pas de donner ces différents itinéraires)

3. Pour terminer ces « itinéraires express », on installe un toboggan géant sur l'arbre 4.

   La forme de ce toboggan est modélisée par une fonction f dont la courbe $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé.



Cette courbe passe par les points I, J et K de coordonnées respectives $(2\,;8{,}1)$, $(10\,;2{,}5)$ et $(20\,;0)$.
La fonction f est définie sur $[0\,;20]$ par

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

où a, b et c sont trois nombres réels.

a. Justifier que a, b et c sont solutions du système $\left\{\begin{array}{l} 400\,a + 20\,b + c = 0 \\ 100\,a + 10\,b + c = 2{,}5 \\ 4\,a + 2\,b + c = 8{,}1 \end{array}\right.$.

b. Déterminer les matrices X et V pour que le système précédent soit équivalent à

$$U\,X = V \quad \text{où} \quad U = \begin{pmatrix} 400 & 20 & 1 \\ 100 & 10 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

c. Déterminer a, b et c.

80 Extrait de la session « Pondichéry », 15 avril 2015

Les sites internet A, B, C ont des liens entre eux. Un internaute connecté sur un de ces trois sites peut, à toutes les minutes, soit y rester soit utiliser un lien vers un des deux autres sites.

- Pour un internaute connecté sur le site A, la probabilité d'utiliser le lien vers B est de 0,2 et celle d'utiliser le lien vers C est de 0,2.
- Pour un internaute connecté sur le site B, la probabilité d'utiliser le lien vers A est de 0,1 et celle d'utiliser le lien vers C est de 0,4.
- Pour un internaute connecté sur le site C, la probabilité d'utiliser le lien vers A est de 0,2 mais il n'y a pas de lien direct avec B.

L'unité de temps est la minute, et à l'instant $t = 0$, le nombre de visiteurs est, respectivement sur les sites A, B et C, $100, 0$ et 0.
On représente la distribution des internautes sur les trois sites après t minutes par une matrice N_t. On a ainsi $N_0 = \begin{pmatrix}100 & 0 & 0\end{pmatrix}$.
On suppose qu'il n'y a ni déconnexion pendant l'heure (de $t = 0$ à $t = 60$) ni nouveaux internautes visiteurs.

1. Représenter le graphe probabiliste de sommets A, B et C correspondant à la situation décrite.
2. Écrire la matrice M de transition associée à ce graphe (dans l'ordre A, B, C).
3. On donne
$$M^2 = \begin{pmatrix}0{,}42 & 0{,}22 & 0{,}36\\ 0{,}19 & 0{,}27 & 0{,}54\\ 0{,}28 & 0{,}04 & 0{,}68\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^{20} \approx \begin{pmatrix}0{,}3125 & 0{,}125 & 0{,}5625\\ 0{,}3125 & 0{,}125 & 0{,}5625\\ 0{,}3125 & 0{,}125 & 0{,}5625\end{pmatrix}.$$
Calculer N_2.
Interpréter le résultat obtenu.
4. Calculer $N_0 \times M^{20}$.
Conjecturer la valeur de l'état stable et interpréter la réponse.
5. Un des internautes transmet un virus à tout site qu'il visitera.
Il se connecte initialement sur le site C et commence sa navigation.
À l'instant $t = 0$, le site C est donc infecté.
   a. Quelle est la probabilité qu'à l'instant $t = 1$ le site A soit infecté ?
   b. Quelle est la probabilité qu'à l'instant $t = 2$ les trois sites soient infectés ?

81 Extrait de la session « Liban », 27 mai 2015

Dans un pays, seulement deux opérateurs de téléphonie mobile SAFIR et TECIM proposent la 4G (standard de transmission de données).

Une étude a montré que d'une année à l'autre :

- 41 % des clients de l'opérateur SAFIR le quittent pour l'opérateur TECIM ;
- 9 % des clients de l'opérateur TECIM le quittent pour l'opérateur SAFIR ;
- aucun client ne renonce à l'utilisation de la 4G.

Cette situation peut être modélisée par un graphe probabiliste $\mathcal{G}$ de sommets S et T où :

- S est l'événement « l'utilisateur de la 4G est un client de l'opérateur SAFIR » ;
- T est l'événement « l'utilisateur de la 4G est un client de l'opérateur TECIM ».

Chaque année, on choisit au hasard un utilisateur de la 4G et on note pour tout entier naturel n :

- s_n la probabilité que cet utilisateur soit un client de l'opérateur SAFIR en $2014+n$;
- t_n la probabilité que cet utilisateur soit un client de l'opérateur TECIM en $2014+n$.

On note $P_n = (s_n \quad t_n)$ la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année $2014+n$.
Dans cet exercice, on se propose de savoir si l'opérateur TECIM atteindra l'objectif d'avoir comme clients au moins 80 % de la population utilisatrice de la 4G.

Partie A

1. Dessiner le graphe probabiliste $\mathcal{G}$.
2. On admet que la matrice de transition du graphe $\mathcal{G}$ en considérant les sommets dans l'ordre S et T est $M = \begin{pmatrix} 0,59 & 0,41 \\ 0,09 & 0,91 \end{pmatrix}$.
   On note $P = (a \quad b)$ la matrice ligne correspondant à l'état stable de ce graphe $\mathcal{G}$.
   a. Montrer que les nombres a et b sont solutions du système $\begin{cases} 0,41\,a - 0,09\,b = 0 \\ a+b=1 \end{cases}$.
   b. Résoudre le système précédent.
3. On admet que $a = 0,18$ et $b = 0,82$.
   Déterminer, en justifiant, si l'opérateur TECIM peut espérer atteindre son objectif.

Partie B

En 2014, on sait que 35 % des utilisateurs de la 4G sont des clients de l'opérateur SAFIR et que 65 % sont des clients de l'opérateur TECIM. Ainsi $P_0 = (0,35 \quad 0,65)$.

1. Déterminer la répartition des clients de la 4G au bout de 2 ans.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $t_{n+1} = 0,5\,t_n + 0,41$.
3. Pour déterminer au bout de combien d'années l'opérateur TECIM atteindra son objectif, on a commencé par élaborer l'algorithme ci-dessous.
   Recopier et compléter les lignes L6, L7 et L9 de cet algorithme pour qu'il donne le résultat attendu.

L1	**Variables :**	T est un nombre
L2		N est un nombre entier
L3	**Traitement :**	Affecter à T la valeur 0,65
L4		Affecter à N la valeur 0
L5		Tant que $T < 0,80$
L6		Affecter à T la valeur …
L7		Affecter à N la valeur …
L8		Fin Tant que
L9	**Sortie :**	Afficher …

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = t_n - 0,82$.
   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5.
   Préciser son premier terme.
   b. En déduire que : $t_n = -0,17 \times 0,5^n + 0,82$.
   c. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation : $-0,17 \times 0,5^n + 0,82 \geqslant 0,80$.
   d. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

82 Extrait de la session « Amérique du Nord », 2 juin 2015

Les parties A et B sont indépendantes.

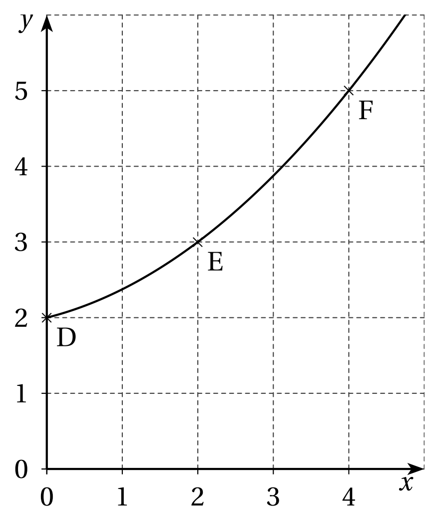
Partie A

Un créateur d'entreprise a lancé un réseau d'agences de services à domicile. Depuis 2010, le nombre d'agences n'a fait qu'augmenter. Ainsi, l'entreprise qui comptait 200 agences au 1er janvier 2010 est passée à 300 agences au 1er janvier 2012 puis à 500 agences au 1er janvier 2014.

On admet que l'évolution du nombre d'agences peut être modélisée par une fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois nombres réels.

La variable x désigne le nombre d'années écoulées depuis 2010 et $f(x)$ exprime le nombre d'agences en centaines. la valeur 0 de x correspond donc à l'année 2010.

Sur le dessin ci-dessous, on a représenté graphiquement la fonction f.



On cherche à déterminer la valeur des coefficients a, b et c.

1. **a.** À partir des données de l'énoncé, écrire un système d'équations traduisant cette situation.

   b. En déduire que le système précédent est équivalent à : $MX = R$ avec
   $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et R une matrice colonne que l'on précisera.

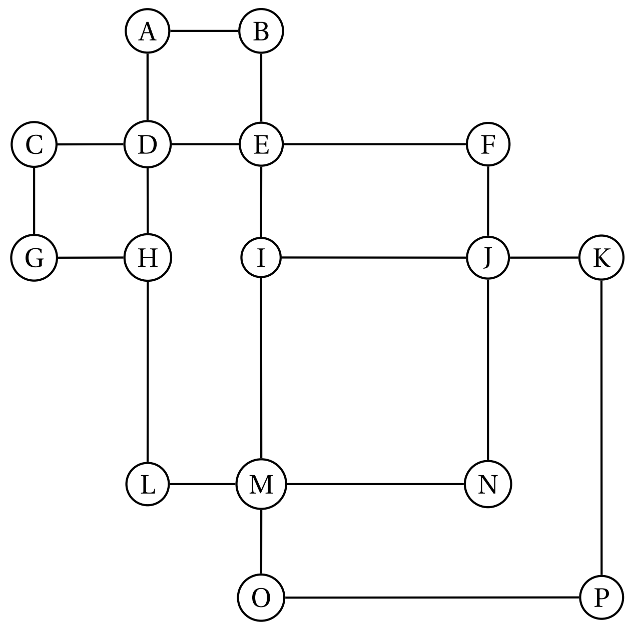
2. On admet que $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}125 & -0{,}25 & 0{,}125 \\ -0{,}75 & 1 & -0{,}25 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   À l'aide de cette matrice, déterminer les valeurs des cÏfficients a, b et c, en détaillant les calculs.

3. Suivant ce modèle, déterminer le nombre d'agences que l'entreprise possédera au 1er janvier 2016.

Partie B

Le responsable d'une agence de services à domicile implantée en ville a représenté par le graphe ci-dessous toutes les rues dans lesquelles se trouvent des clients qu'il doit visiter quotidiennement. Dans ce graphe, les arêtes sont les rues et les sommets sont les intersections des rues.



1. **a.** Déterminer si le graphe est connexe.

   b. Déterminer si le graphe est complet.

2. Ce responsable voudrait effectuer un circuit qui passe une et une seule fois par chaque rue dans laquelle se trouvent des clients.

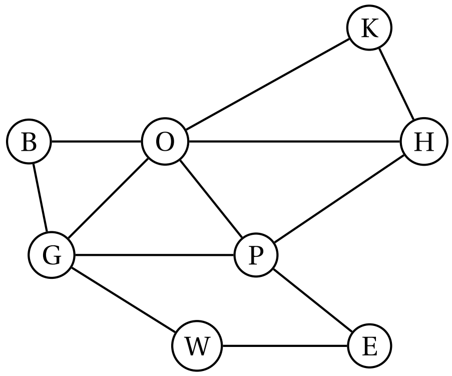
   Déterminer si ce circuit existe dans les deux cas suivants.

   a. Le point d'arrivée est le même que le point de départ.

   b. Le point d'arrivée n'est pas le même que le point de départ.

83 Extrait de la session « Centres étrangers », 10 juin 2015

On a schématisé ci-dessous une partie du plan du métro londonien par un graphe Γ dont les sommets sont les stations et les arêtes sont les lignes desservant ces stations.
Chaque station de métro est désignée par son initiale comme indiqué dans la légende.

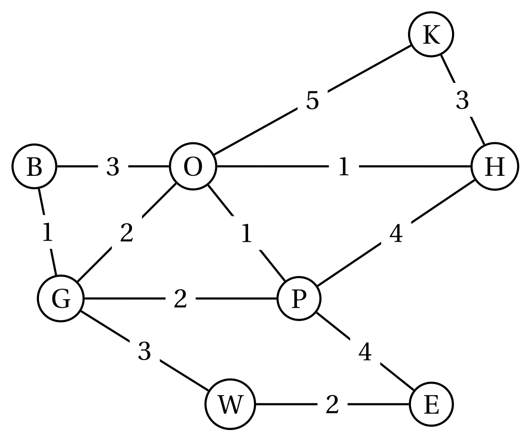


Légende :
B : Bond Street
E : Embankment
G : Green Park
H : Holborn
K : King's Cross St Pancras
O : Oxford Circus
P : Piccadilly Circus
W : Westminster

1. **a.** Déterminer en justifiant si le graphe Γ est connexe.
   b. Déterminer en justifiant si le graphe Γ est complet.
2. Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ admet une chaîne eulérienne.
   Si oui, donner une telle chaîne.
3. Donner la matrice d'adjacence M du graphe Γ (les sommets seront rangés dans l'ordre alphabétique).

   Pour la suite de l'exercice, on donne la matrice $M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 & 2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 6 & 4 \\ 6 & 1 & 4 & 4 & 4 & 9 & 10 & 6 \\ 4 & 1 & 4 & 4 & 5 & 8 & 8 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 5 & 2 & 7 & 3 & 1 \\ 7 & 3 & 9 & 8 & 7 & 8 & 10 & 3 \\ 3 & 6 & 10 & 8 & 3 & 10 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 3 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Un touriste se trouve à la station Holborn. Il prévoit de se rendre à la station Green Park en utilisant exactement trois lignes de métro sur son trajet.
   a. Sans utiliser le graphe, donner le nombre de trajets possibles et justifier la réponse.
   b. Donner les trajets possibles.
5. Sur le graphe pondéré ci-contre, on a indiqué la durée, exprimée en minutes, des trajets entre chaque station (la durée est indiquée sur chaque arête du graphe Γ).
   À partir de la station Westminster, ce touriste doit rejoindre la station King's Cross St Pancras le plus rapidement possible pour prendre un train.

   En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer le trajet permettant de relier la station Westminster à la station King's Cross St Pancras en une durée minimale.
   On précisera cette durée.



84 Extrait de la session « Polynésie », 12 juin 2015

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Un constructeur de planches de surf fabrique 3 modèles. La conception de chaque modèle nécessite le passage par 3 postes de travail. Le tableau 1 indique le nombre d'heures nécessaires par modèle et par poste pour réaliser les planches et le tableau 2 indique le coût horaire par poste de travail.

Tableau 1	Poste 1	Poste 2	Poste 3
Modèle 1	8 h	10 h	14 h
Modèle 2	6 h	6 h	10 h
Modèle 3	12 h	10 h	18 h

Tableau 2	
Poste 1	25 €/h
Poste 2	20 €/h
Poste 3	15 €/h

1. Soit H et C les deux : matrices suivantes : $H = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 14 \\ 6 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 18 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 25 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$.

a. Donner la matrice produit $P = H \times C$.

b. Que représentent les coefficients de la matrice $P = H \times C$?

2. Après une étude de marché, le fabricant souhaite que les prix de revient par modèle soient les suivants :

Modèle 1 : 500 € ; Modèle 2 : 350 € ; Modèle 3 : 650 €

Il cherche à déterminer les nouveaux coûts horaires par poste, notés a, b et c, permettant d'obtenir ces prix de revient.

a. Montrer que les réels a, b et c doivent être solutions du système $H \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 350 \\ 650 \end{pmatrix}$.

b. Déterminer les réels a, b et c.

Partie B

La façade du magasin dans lequel sont commercialisées les planches est illuminée par un très grand nombre de spots qui sont programmés de la manière suivante :

- les spots s'allument tous à 22 heures ;
- toutes les 10 secondes à partir de 22 heures, et ce de manière aléatoire, 30 % des spots allumés s'éteignent et 50 % de ceux qui sont éteints se rallument.

On note : A l'état : « le spot est allumé » et E l'état : « le spot est éteint ».

1. **a.** Dessiner un graphe probabiliste traduisant la situation.

b. Recopier et compléter la matrice de transition (dans l'ordre A, E) associée au graphe, $M = \begin{pmatrix} \dots & 0,3 \\ 0,5 & \dots \end{pmatrix}$.

2. On note n le nombre d'étapes (c'est à dire d'intervalles de temps de 10 secondes) qui s'écoulent à partir de 22 heures et $P_n = (a_n \quad b_n)$ l'état d'un spot à l'étape n, où a_n est la probabilité qu'il soit allumé et b_n la probabilité qu'il soit éteint.

On a alors, pour tout entier naturel n : $P_{n+1} = P_n \times M$.

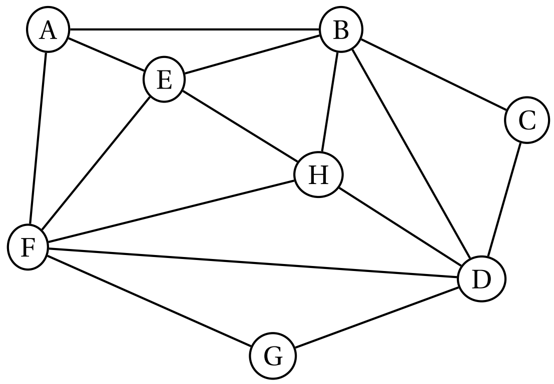
a. Justifier que $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.
Écrire une relation entre P_0 et P_n.

b. Déterminer les coefficients de la matrice P_3.
Quelle est la probabilité que le spot considéré soit éteint à 22 heures et 30 secondes ?

3. Déterminer l'état stable $(a \quad b)$ du graphe probabiliste.

85 Extrait de la session « Asie », 16 juin 2015

La coopérative LAFRUITIERE collecte le lait de 7 exploitations de montagne.
La situation géographique est représentée par le graphe ci-dessous, noté G_L. La coopérative est située au sommet A, les autres sommets B, C, D, E, F, G et H représentent les différentes exploitations ; les arêtes représentent le réseau routier reliant ces exploitations.



Partie A

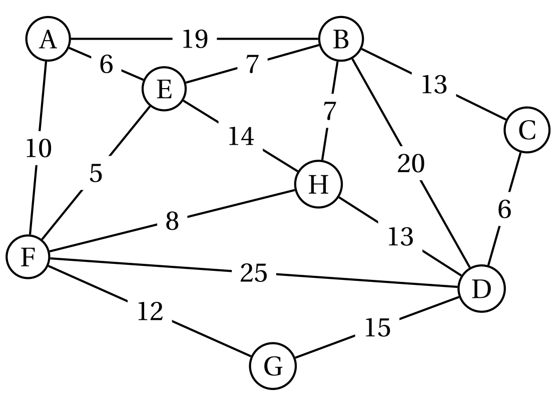
1. **a.** Le graphe G_L est-il complet ? Justifier.
   b. Le graphe G_L est-il connexe ? Justifier.
2. Est-il possible d'organiser une tournée de toutes les exploitations en partant de A et en terminant en A et en passant au moins une fois par chaque client, tout en empruntant une fois et une seule chaque route ? Justifier la réponse.
3. On appelle M la matrice d'adjacence associée au graphe G_L (les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique).

   On donne la matrice $M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 3 & 7 & 8 & 11 & 3 & 6 \\ 11 & 8 & 7 & 13 & 12 & 8 & 6 & 13 \\ 3 & 7 & 2 & 7 & 5 & 6 & 2 & 4 \\ 7 & 13 & 7 & 8 & 8 & 13 & 7 & 12 \\ 8 & 12 & 5 & 8 & 8 & 12 & 5 & 11 \\ 11 & 8 & 6 & 13 & 12 & 8 & 7 & 13 \\ 3 & 6 & 2 & 7 & 5 & 7 & 2 & 4 \\ 6 & 13 & 4 & 12 & 11 & 13 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

   Déterminer, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant A à H.
   Indiquer ces chemins.

Partie B

Les arêtes sont pondérées par les distances entre les exploitations, exprimées en kilomètres. La coopérative doit collecter du lait provenant de l'exploitation D ; quel est le plus court parcours pour se rendre de A à D ? Justifier.



86 Extrait de la session « Antilles – Guyane », 24 juin 2015

Une municipalité vient de mettre en place le service « vélo en liberté ». Il s'agit d'un service de location de vélos à la journée.
Les vélos sont disponibles sur deux sites A et B et doivent être ramenés en fin de journée indifféremment dans l'un des deux sites.
Après une étude statistique, on considère que :

- si un vélo est loué sur le site A, la probabilité d'être ramené en A est 0,6 ;
- si un vélo est loué sur le site B, la probabilité d'être ramené en B est 0,7.

Les résultats numériques seront arrondis à 10^{-2} près.

1. En notant respectivement A et B les états « le vélo est en A » et « le vélo est en B », traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets A et B.

2. Donner M la matrice de transition de ce graphe en considérant les sommets dans l'ordre A, B.

3. Pour tout entier naturel n, on note a_n (respectivement b_n) la probabilité qu'un vélo quelconque soit, après n jours, sur le site A (respectivement sur le site B).
On note P_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ correspondant à l'état probabiliste après n jours.
Le premier jour, tous les vélos sont distribués également sur les deux sites. On a donc $P_0 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

a. On donne :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0,48 & 0,52 \\ 0,39 & 0,61 \end{pmatrix}.$$

Calculer P_2 en donnant le détail des calculs matriciels.

b. Calculer P_4 et interpréter le résultat dans le contexte du problème.

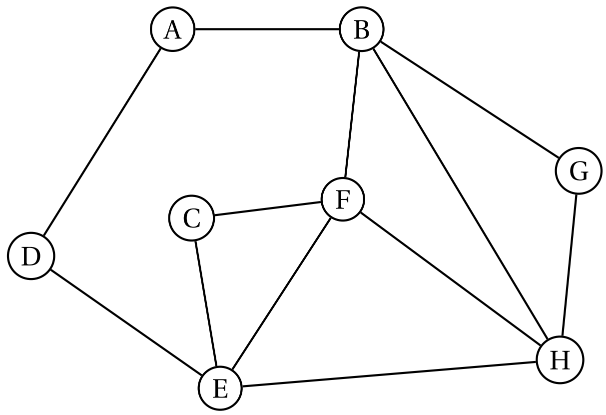
c. Déterminer l'état stable du graphe, noté $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$.

d. Tous les mois, un véhicule est affecté à la redistribution des vélos afin de rétablir au mieux la répartition initiale qui était de 70 vélos sur chaque site.
La municipalité envisage d'affecter un véhicule pouvant contenir 12 vélos.
Ce choix parait-il adapté à la situation ?

87 Extrait de la session « Métropole – La Réunion », 24 juin 2015

PARTIE A

On considère le graphe $\mathscr{G}$ ci-dessous :



1. Déterminer en justifiant si ce graphe :
   a. est connexe ;
   b. admet une chaîne eulérienne.
2. On note M la matrice d'adjacence associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique. On donne :

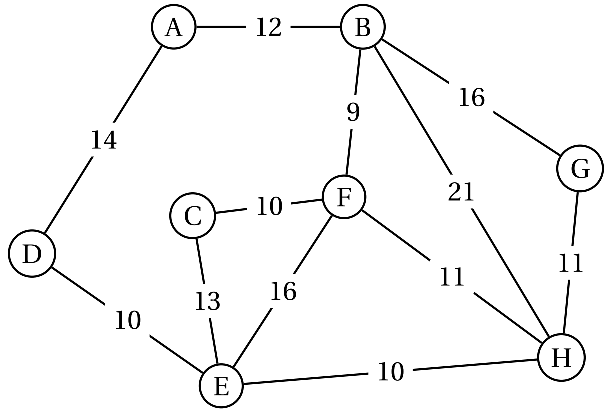
$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 3 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 5 & 9 & 6 & 8 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 6 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 5 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 5 & 4 & 8 & 3 & 9 \\ 2 & 9 & 6 & 3 & 8 & 6 & 3 & 9 \\ 1 & 6 & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 8 & 3 & 2 & 9 & 9 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

   Donner, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant E à B.

PARTIE B

Un club alpin souhaite proposer à ses membres des randonnées de plusieurs jours dans les Alpes. À cet effet, huit refuges notés A, B, C, D, E, F, G et H ont été sélectionnés.
Le graphe $\mathscr{G}$ de la partie A permet de visualiser les différents itinéraires possibles, les sommets représentant les refuges et les arêtes schématisant tous les sentiers de randonnée balisés les reliant.

1. D'après l'étude effectuée dans la partie A, le club alpin est-il en mesure de proposer :
   a. un itinéraire au départ du refuge A qui passerait par tous les refuges en empruntant une fois et une seule fois chacun des sentiers ? si oui, proposer un tel itinéraire ;
   b. des itinéraires de trois jours (un jour correspondant à une liaison entre deux refuges) reliant le refuge E au refuge B ? si oui, combien peut-il en proposer ?
2. Le graphe $\mathscr{G}$ est complété ci-dessous par la longueur en kilomètres de chacun des sentiers.



Le club alpin désire aussi proposer à ses membres l'itinéraire le plus court reliant A à H.
Déterminer cet itinéraire et en préciser la longueur en kilomètres.

88 Extrait de la session « Polynésie », 9 septembre 2015

Dans un plan de lutte contre la pollution urbaine, une municipalité a décidé de réduire l'utilisation des automobiles en ville en instaurant une taxe pour les automobiles circulant dans une zone du centre ville appelée ZTL (Zone à Trafic Limité) et de développer un réseau de navettes.

Partie A

L'objectif affiché par la municipalité est de réduire de moitié la présence des automobiles dans la zone ZTL, dans les deux ans à venir.
Initialement, 40 % des automobiles circulant dans la ville, circulaient dans cette zone ZTL.
Suite à l'instauration de la taxe, l'évolution du trafic dans la ville a été suivie mois après mois.
L'étude a révélé que, parmi les automobiles circulant dans la ville :

- 3 % des automobiles circulant dans la zone ZTL n'y circulaient plus le mois suivant.
- 0,2 % des automobiles qui ne circulaient pas dans la zone ZTL ont été amenés à y circuler le mois suivant.

On note Z l'état « l'automobile a circulé dans la zone ZTL au cours du mois » et $\overline{Z}$ l'état « l'automobile n'a pas circulé dans la zone ZTL au cours du mois ».

Pour tout entier naturel n, on note :

- a_n la proportion d'automobiles circulant dans la zone ZTL au cours du n-ième mois ;
- b_n la proportion d'automobiles ne circulant pas dans la zone ZTL au cours du n-ième mois ;
- $P_n = (a_n\ b_n)$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste après n mois.

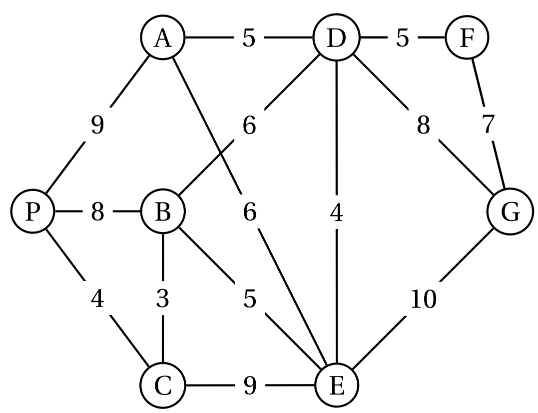
On a : $a_n + b_n = 1$ et $P_0 = \begin{pmatrix}0,4 & 0,6\end{pmatrix}$.

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets Z et $\overline{Z}$.
2. **a.** Donner la matrice de transition M associée à ce graphe (la première colonne concerne Z et la deuxième concerne $\overline{Z}$).

   b. Vérifier que $P_1 = \begin{pmatrix}0,3892 & 0,6108\end{pmatrix}$.
3. L'objectif affiché par la municipalité sera-t-il atteint ?

Partie B

Un réseau de navettes gratuites est mis en place entre des parkings situés aux abords de la ville et les principaux sites de la ville.
Le graphe ci-contre indique les voies et les temps des liaisons, en minutes, entre ces différents sites.

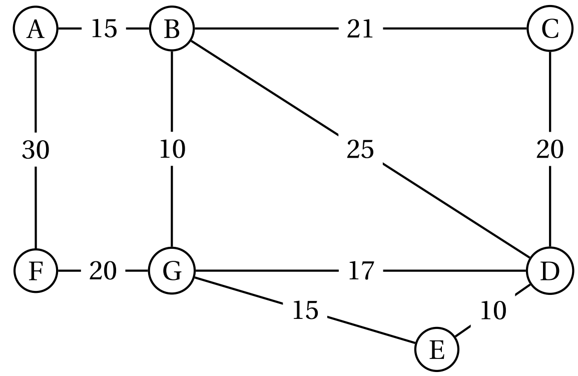


1. Peut-on envisager un itinéraire qui relierait le parking P à la gare G en desservant une et une seule fois tous les sites ?
2. Peut-on envisager un itinéraire qui emprunterait une et une seule fois toutes les voies ?
3. Déterminer un trajet de durée minimale pour se rendre du parking P à la gare G.

89 Extrait de la session « Antilles – Guyane », Septembre 2015

Un cycliste désire visiter plusieurs villages notés A, B, C, D, E, F et G reliés entre eux par un réseau de pistes cyclables.

Le graphe ci-contre schématise son plan ; les arêtes représentent les pistes cyclables et les distances sont en kilomètre.



Partie A

Pour faire son parcours, le cycliste décide qu'il procèdera selon l'algorithme ci-dessous :

ligne 1	Marquer sur le plan tous les villages comme non « visités »
ligne 2	Choisir un village de départ
ligne 3	Visiter le village et le marquer « visité »
ligne 4	Rouler vers le village le plus proche
ligne 5	Tant que le village où il arrive n'est pas un village déjà visité
ligne 6 ligne 7	|visiter le village et le marquer « visité » |rouler vers le village le plus proche sans revenir en arrière
ligne 8	Fin Tant que
ligne 9	afficher la liste des villages visités

1. Quelle propriété du graphe permet à la ligne 4 d'être toujours exécutable ?
2. En partant du village noté G, quelle sera la liste des villages visités ?
3. Existe-t-il un village de départ qui permette, en suivant cet algorithme, de visiter tous les villages ?
4. Le cycliste abandonne l'idée de suivre l'algorithme. Il souhaite maintenant, partant d'un village, y revenir après avoir emprunté toutes les pistes cyclables une et une seule fois.
   Cela sera-t-il possible ?

Partie B

1. Écrire la matrice M de transition de ce graphe (dans l'ordre A, B, C, ... , G).
2. On donne la matrice M^4 :

$$M^4 = \begin{array}{c} \\ \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \\ \mathrm{D} \\ \mathrm{E} \\ \mathrm{F} \\ \mathrm{G} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{E} & \mathrm{F} & \mathrm{G} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 5 & 9 & 11 & 4 & \mathbf{1} & 16 \\ 5 & 30 & 12 & 23 & 18 & 16 & 16 \\ 9 & 12 & 12 & 14 & 9 & 4 & 18 \\ 11 & 23 & 14 & 28 & 14 & 11 & 23 \\ 4 & 18 & 9 & 14 & 12 & 9 & 12 \\ 1 & 16 & 4 & 11 & 9 & 10 & 5 \\ 16 & 16 & 18 & 23 & 12 & 5 & 30 \end{pmatrix} \end{array}$$

   Interpréter le terme en gras, ligne A, colonne F (valant 1) dans le contexte de l'exercice.

90 Extrait de la session « Métropole – La Réunion », 11 septembre 2015

Dans une société d'assurance, les clients peuvent choisir de payer leur cotisation chaque mois (paiement mensuel) ou en une fois (paiement annuel).
On constate que 30 % de ceux qui paient en une fois choisissent le paiement mensuel l'année suivante, alors que 85 % de ceux qui paient chaque mois conservent ce mode de paiement l'année suivante.
En 2014, 60 % des clients paient en une fois et 40 % paient mensuellement.

Dans toute la suite de l'exercice, n désigne un nombre entier naturel.

On note :

- a_n la probabilité qu'un client choisi au hasard paie en une fois pour l'année $2014 + n$;
- b_n la probabilité qu'un client choisi au hasard paie mensuellement pour l'année $2014 + n$.

On a $a_0 = 0,6$ et $b_0 = 0,4$ et on note P_n l'état probabiliste pour l'année $2014 + n$. Ainsi $P_0 = \begin{pmatrix}0,6 & 0,4\end{pmatrix}$.

On note :

- A l'état « le client paie en une fois » ;
- B l'état « le client paie mensuellement ».

1. Représenter un graphe probabiliste de sommets A et B.

2. Écrire la matrice de transition M associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.

3. Déterminer la probabilité qu'un client paie en une fois durant l'année 2018 (arrondir les résultats au millième).

4. Déterminer l'état stable et en donner une interprétation.

5. Pour tout entier naturel n, justifier que $a_{n+1} = 0,55\, a_n + 0,15$.

6. On cherche à déterminer le plus petit entier n tel que $a_n < 0,3334$.

   a. Écrire un algorithme permettant de déterminer cet entier n.

   b. On admet que pour tout entier naturel n,

$$a_n = \frac{4}{15} \times 0,55^n + \frac{1}{3}.$$

   Déterminer par le calcul le plus petit entier n tel que $a_n < 0,3334$.

91 Extrait de la session « Nouvelle-Calédonie », 19 novembre 2015

L'été, un centre de loisirs propose aux adolescents la pratique du canoë-kayak ou de la planche à rame.
Tous les matins, chaque adolescent doit choisir un et un seul sport parmi les deux proposés.
On admet que :

- si un adolescent choisit le canoë-kayak un jour donné, alors la probabilité qu'il choisisse la planche à rame le jour suivant est égale à 0,4 ;
- si un adolescent choisit la planche à rame un jour donné, alors la probabilité qu'il choisisse le canoë-kayak le jour suivant est égale à 0,2 ;
- le premier jour, la proportion d'adolescents qui choisissent le canoë-kayak est égale à 0,85.

On note :

- K l'état : « l'adolescent choisit le canoë-kayak » ;
- $\overline{K}$ l'état : « l'adolescent choisit la planche à rame ».

On note, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

- p_n la probabilité qu'un adolescent pris au hasard choisisse le canoë-kayak lors du n-ième jour ;
- q_n la probabilité qu'un adolescent pris au hasard choisisse la planche à rame le n-ième jour ;
- $P_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste lors du n-ième jour.

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets K et $\overline{K}$.
2. Donner la matrice de transition M associée à ce graphe, les sommets K et $\overline{K}$ étant classés dans cet ordre.
3. Justifier que $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \end{pmatrix}$.
4. Avec la calculatrice, déterminer l'état probabiliste lors du 3$^{\text{e}}$ jour.
5. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, montrer que $p_{n+1} = 0{,}4\,p_n + 0{,}2$.
6. On considère l'algorithme suivant :

Initialisation	Choisir un nombre entier naturel $N \geqslant 2$
	p prend la valeur 0,85
Traitement	Pour i allant de 2 à N
	p prend la valeur $0{,}4\,p + 0{,}2$
	Fin pour
Sortie	Afficher p

   a. Pour la valeur $N = 5$ saisie, recopier et compléter le tableau suivant par autant de colonnes que nécessaire pour retranscrire l'exécution de l'algorithme. Arrondir les résultats au millième.

Valeur de i	*****	2		
Valeur de p	0,85			

   b. En déduire l'affichage obtenu quand la valeur de N saisie est 5.

   c. Dans le contexte de cet exercice, expliquer comment interpréter le nombre obtenu en sortie de cet algorithme.

Partie B

D'après la partie A, on sait que $p_{n+1} = 0{,}4\,p_n + 0{,}2$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
On admet que $p_n = \dfrac{31}{60} \times 0{,}4^{n-1} + \dfrac{1}{3}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

1. Conjecturer la limite de la suite (p_n).
2. Interpréter le résultat.

92 Extrait de la session « Amérique du Sud », 25 novembre 2015

Claudine est une passionnée de lecture abonnée à l'hebdomadaire littéraire « La Lecture ». Elle se rend une fois par semaine à la bibliothèque et demande ou non l'avis de la bibliothécaire sur le livre mis en valeur dans l'hebdomadaire « La Lecture ».
Lorsque Claudine demande à la bibliothécaire son avis, la probabilité qu'elle le demande de nouveau la semaine suivante est 0,9.
Lorsque Claudine ne demande pas à la bibliothécaire son avis, la probabilité qu'elle ne le demande pas non plus la semaine suivante est 0,6.
La première semaine, on suppose que la probabilité que Claudine demande un avis vaut 0,1.
Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note :

- a_n la probabilité que Claudine demande un avis à la bibliothécaire la n-ième semaine ;
- b_n la probabilité que Claudine ne demande pas d'avis à la bibliothécaire la n-ième semaine ;
- $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste la n-ième semaine.

On a ainsi $a_1 = 0{,}1$ et $b_1 = 0{,}9$.

1. **a.** Illustrer la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B :
   A représente l'état « Claudine demande un avis à la bibliothécaire » et B représente l'état « Claudine ne demande pas d'avis à la bibliothécaire ».

   b. Indiquer la matrice de transition M associée à ce graphe. On prendra les sommets A et B dans l'ordre (A, B).
2. Montrer que l'on a $P_2 = \begin{pmatrix} 0{,}45 & 0{,}55 \end{pmatrix}$.
3. **a.** Montrer que l'état stable de la répartition du choix de la demande d'avis est $P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

   b. Interpréter ce résultat.
4. On admet que, pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on a :

$$a_{n+1} = 0{,}5\,a_n + 0{,}4$$

On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES :	A est un réel et N est un entier naturel
INITIALISATION :	A prend la valeur 0,1 N prend la valeur 1

TRAITEMENT :	Tant que $A \leqslant 0{,}79$
	    N prend la valeur $N+1$
	    A prend la valeur $0{,}5 \times A + 0{,}4$
	Fin du Tant que

SORTIE :	Afficher N

Préciser ce que cet algorithme permet d'obtenir. (On ne demande pas de donner la valeur de N affichée en sortie d'algorithme.)

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   On admet que, pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on a :

$$a_n = 0{,}8 - 0{,}7 \times 0{,}5^{n-1}$$

Déterminer le nombre de semaines à partir duquel la probabilité que Claudine demande un avis soit supérieure à 0,799.

93 Extrait de la session « Nouvelle-Calédonie », mars 2016

Deux supermarchés concurrents, Alphamarché et Bétamarché ouvrent simultanément un service de retrait permettant à leurs clients de récupérer leurs courses après avoir passé leur commande sur internet.
Afin de promouvoir leur service de retrait, chacun organise une campagne de publicité.
Alphamarché contrôle l'efficacité de sa campagne par des sondages mensuels où les clients qui utilisent les services de retrait se prononcent tous en faveur d'un seul service de retrait, celui d'Alphamarché ou celui de Bétamarché.
Au début de la campagne, 20 % des personnes interrogées préfèrent Alphamarché.
Les sondages mensuels ont permis de mettre en évidence que les arguments publicitaires font évoluer chaque mois la répartition.
On décide de modéliser cette évolution en considérant que 10 % des personnes préférant Alphamarché et 15 % des personnes préférant Bétamarché changent d'avis d'un mois sur l'autre.
Le mois du début de la campagne est noté mois 0.
On interroge, au hasard, un client faisant ses courses dans l'un des deux services de retrait.

Pour tout entier naturel n, on note :

- a_n la probabilité que le client interrogé préfère Alphamarché le mois n ;
- b_n la probabilité qu'il préfère Bétamarché le mois n ;
- $P_n = (a_n \ b_n)$ la matrice ligne désignant l'état probabiliste au mois n.

1. Déterminer la matrice ligne P_0 de l'état probabiliste initial.

2. On note A, l'état « le client interrogé préfère Alphamarché » et B l'état « le client interrogé préfère Bétamarché ». Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.

3. **a.** Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

b. Montrer que $P_1 = (0,3 \quad 0,7)$.

4. **a.** Exprimer, pour tout entier naturel n, P_n en fonction de P_0, M et n.

b. En déduire la matrice ligne P_3 et interpréter ce résultat.

5. Le service de retrait d'Alphamarché finira-t-il par être préféré à celui de Bétamarché ? Justifier.

94 Extrait de la session « Pondichéry », 21 avril 2016

Une étude statistique sur une population d'acheteurs a montré que :

- 90 % des personnes qui ont fait leur dernier achat en utilisant internet affirment vouloir continuer à utiliser internet pour faire le suivant. Les autres personnes comptent faire leur prochain achat en magasin ;
- 60 % des personnes qui ont fait leur dernier achat en magasin affirment vouloir continuer à effectuer le suivant en magasin. Les autres comptent effectuer leur prochain achat en utilisant internet.

Dans toute la suite de l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.
Une personne est choisie au hasard parmi les acheteurs.
On note :

- a_n la probabilité que cette personne fasse son n-ième achat sur internet ;
- b_n la probabilité que cette personne fasse son n-ième achat en magasin.

On suppose de plus que $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$.
On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste correspondant au n-ième achat. Ainsi $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.
On note :

- A l'état « a personne effectue son achat sur internet » ;
- B l'état « La personne effectue son achat en magasin ».

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
2. Écrire la matrice de transition M associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.
3. **a.** Calculer la matrice M^4.

   b. En déduire que la probabilité que la personne interrogée fasse son 5$^{\text{ème}}$ achat sur internet est égale à 0,812 5.
4. On note $P = (a \quad b)$ l'état stable associé à ce graphe.

   a. Montrer que les nombres a et b sont solutions du système :

$$\begin{cases} 0{,}1\,a - 0{,}4\,b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

   b. Résoudre le système précédent.

   c. À long terme, quelle est la probabilité que cette personne fasse ses achats sur internet ?
5. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$a_{n+1} = 0{,}5\,a_n + 0{,}4$$

   b. Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il affiche le plus petit entier naturel n non nul tel que $a_n \leqslant 0{,}801$.

Variables :	N est un entier naturel
	A est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à N la valeur 1
	Affecter à A la valeur 1
Traitement :	Tant que ...
	Affecter à A la valeur $0{,}5 \times A + 0{,}4$
	Affecter à N la valeur ....
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher N

   c. Quelle est la valeur affichée par l'algorithme en sortie ?

95 Extrait de la session « Liban », 31 mai 2016

L'entreprise PiscinePlus, implantée dans le sud de la France, propose des contrats annuels d'entretien aux propriétaires de piscines privées.

C'est la seule entreprise dans les environs. Aussi, les propriétaires de piscines n'ont que deux choix possibles : soit ils s'occupent eux-mêmes de l'entretien de leur piscine, soit ils souscrivent un contrat avec l'entreprise PiscinePlus.

On admet que le nombre de propriétaires de piscines est constant.

Le patron de cette entreprise remarque que chaque année :

- 12 % des particuliers qui entretenaient eux-mêmes leur piscine décident de souscrire un contrat avec l'entreprise PiscinePlus ;
- 20 % de particuliers sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus décident de le résilier pour entretenir eux-mêmes leur piscine.

Cette situation peut être modélisée par un graphe probabiliste de sommets C et L où

- C est l'évènement « Le particulier est sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus » ;
- L est l'évènement « Le particulier effectue lui-même l'entretien de sa piscine ».

Chaque année, on choisit au hasard un particulier possédant une piscine et on note pour tout entier naturel n :

- c_n la probabilité que ce particulier soit sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus l'année $2015+n$;
- ℓ_n la probabilité que ce particulier entretienne lui-même sa piscine l'année $2015+n$.

On note $P_n = \begin{pmatrix} c_n & \ell_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année $2015+n$.

Dans cet exercice, on se propose de savoir si l'entreprise PiscinePlus atteindra l'objectif d'avoir au moins 35 % des propriétaires de piscines comme clients sous contrat d'entretien.

Partie A

1. Dessiner le graphe probabiliste représentant cette situation et donner la matrice de transition associée au graphe dont les sommets sont pris dans l'ordre C et L.
2. **a.** Montrer que l'état stable de ce graphe est $P = \begin{pmatrix} 0,375 & 0,625 \end{pmatrix}$.

   b. Déterminer, en justifiant, si l'entreprise PiscinePlus peut espérer atteindre son objectif.

Partie B

En 2015, on sait que 15 % des propriétaires de piscines étaient sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus. On a ainsi $P_0 = \begin{pmatrix} 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $c_{n+1} = 0,68\,c_n + 0,12$.
2. À l'aide d'un algorithme, on cherche à connaître au bout de combien d'années l'entreprise PiscinePlus atteindra son objectif :

Variables :	n est un nombre entier naturel
	C est un nombre réel
Traitement :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à C la valeur 0,15
	Tant que $C < 0,35$ faire
	n prend la valeur $n+1$
	C prend la valeur $0,68C+0,12$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous, en ajoutant autant de colonnes que nécessaire pour permettre la réalisation de l'algorithme ci-dessus. On arrondira les résultats au millième.

Valeur de n	0		
Valeur de C	0,15		

b. Donner la valeur affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

3. On rappelle que, pour tout entier naturel n, on a $c_{n+1} = 0{,}68\,c_n + 0{,}12$ et que $c_0 = 0{,}15$.

On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = c_n - 0{,}375$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

En préciser la raison et le premier terme.

On admet que, pour tout entier naturel n, on a $c_n = -0{,}225 \times 0{,}68^n + 0{,}375$.

b. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $c_n \geqslant 0{,}35$.

c. Quel résultat de la question **2.** retrouve-t-on ?

96 Extrait de la session « Amérique du Nord », 1er juin 2016

Un groupe de presse édite un magazine qu'il propose en abonnement.
Jusqu'en 2010, ce magazine était proposé uniquement sous forme papier. Depuis 2011, les abonnés du magazine ont le choix entre la version numérique et la version papier.
Une étude a montré que, chaque année, certains abonnés changent d'avis : 10 % des abonnés à la version papier passent à la version numérique et 6 % des abonnés à la version numérique passent à la version papier.
On admet que le nombre global d'abonnés reste constant dans le temps.
Pour tout nombre entier naturel n, on note :

- a_n la probabilité qu'un abonné pris au hasard ait choisi la version papier l'année $2010+n$;
- b_n la probabilité qu'un abonné pris au hasard ait choisi la version numérique l'année $2010+n$;
- $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année $2010+n$.

On a donc $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. **a.** Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B où le sommet A représente l'état « abonné à la version papier » et B l'état « abonné à la version numérique ».

   b. Déterminer la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre A, B des sommets.

   c. Montrer que $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \end{pmatrix}$.

2. On admet que, pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1} = 0{,}9\,a_n + 0{,}06\,b_n$ et $b_{n+1} = 0{,}1\,a_n + 0{,}94\,b_n$.
   Le directeur du groupe de presse souhaite visualiser l'évolution des deux types d'abonnements. Pour cela, on lui propose les deux algorithmes suivants :

   Algorithme 1

   ```
   Entrée
   Saisir n
   Traitement
   a prend la valeur 1
   b prend la valeur 0
   Pour i allant de 1 à n
      a prend la valeur 0,9 × a + 0,06 × b
      b prend la valeur 0,1 × a + 0,94 × b
      Afficher a et b
   Fin Pour
   ```

   Algorithme 2

   ```
   Entrée
   Saisir n
   Traitement
   a prend la valeur 1
   b prend la valeur 0
   Pour i allant de 1 à n
      c prend la valeur a
      a prend la valeur 0,9 × a + 0,06 × b
      b prend la valeur 0,1 × c + 0,94 × b
      Afficher a et b
   Fin Pour
   ```

   Sachant qu'un seul des algorithmes proposés permet de répondre au souhait du directeur, préciser lequel en justifiant la réponse.

3. **a.** Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1} = 0{,}84\,a_n + 0{,}06$.

   b. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = a_n - 0{,}375$.
   Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,84 et calculer u_0.

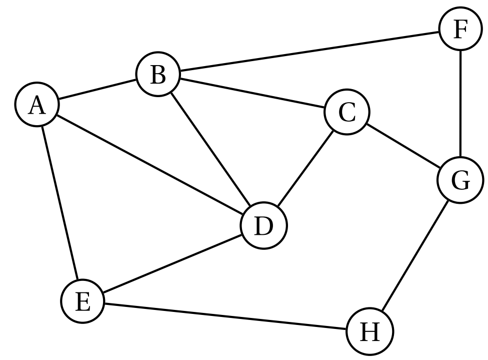
   c. Donner l'expression de u_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $a_n = 0{,}375 + 0{,}625 \times 0{,}84^n$.

4. En résolvant une inéquation, déterminer l'année à partir de laquelle la proportion d'abonnés à la version papier du magazine devient inférieure à 50 %.

97 Extrait de la session « Centres étrangers », 8 juin 2016

Une compagnie aérienne utilise huit aéroports que l'on nomme A, B, C, D, E, F, G et H.
Entre certains de ces aéroports, la compagnie propose des vols dans les deux sens.
Cette situation est représentée par le graphe Γ ci-contre, dans lequel :

1. les sommets représentent les aéroports,
2. les arêtes représentent les liaisons assurées dans les deux sens par la compagnie.



Partie A

1. **a.** Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ est complet.

   b. Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ est connexe.
2. Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ admet une chaîne eulérienne. Si oui, donner une telle chaîne.
3. Donner la matrice d'adjacence M du graphe Γ en respectant l'ordre alphabétique des sommets du graphe.
4. Pour la suite de l'exercice, on donne les matrices suivantes :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 & 7 & 6 & 1 & 4 & 1 \\ 8 & 4 & 8 & 8 & 3 & 6 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 7 & 6 & 7 & 3 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 4 & 7 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 3 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 6 & 3 & 1 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

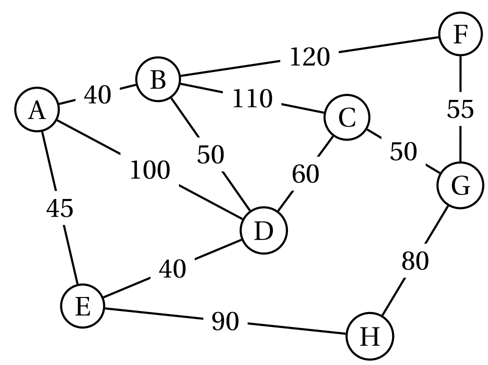
   Un voyageur souhaite aller de l'aéroport B à l'aéroport H.

   a. Déterminer le nombre minimal de vols qu'il doit prendre, Justifier les réponses à l'aide des matrices données ci-dessus.

   b. Donner tous les trajets possibles empruntant trois vols successifs.

Partie B

Les arêtes sont maintenant pondérées par le coût de chaque vol, exprimé en euros.
Un voyageur partant de l'aéroport A doit se rendre à l'aéroport G.
En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer le trajet le moins cher.

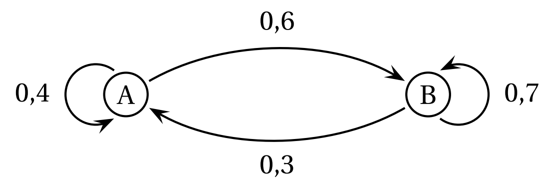


98 Extrait de la session « Polynésie », 10 juin 2016

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

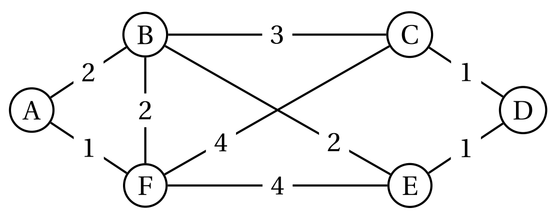
Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. On donne le graphe probabiliste suivant :



Affirmation A : L'état stable associé à ce graphe est $\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

2. On donne le graphe pondéré G suivant :



Affirmation B : Il existe une chaîne passant une et une seule fois par toutes les arêtes de ce graphe.

Affirmation C : La plus courte chaîne entre les sommets A et D est une chaîne de poids 5.

3. On considère la matrice
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On suppose que M est la matrice d'adjacence d'un graphe à quatre sommets A, B, C, D dans cet ordre.

Affirmation D : Il existe exactement 3 chaînes de longueur 4 reliant le sommet B au sommet D.

4. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Affirmation E : Il existe un nombre réel a pour lequel B est l'inverse de A.

99 Extrait de la session « Métropole – La Réunion », 22 juin 2016

Afin de se préparer à courir des marathons, Hugo aimerait effectuer quotidiennement un footing à compter du 1er janvier 2014.
On admet que :

- si Hugo court un jour donné, la probabilité qu'il ne coure pas le lendemain est de 0,2 ;
- s'il ne court pas un jour donné, la probabilité qu'il ne coure pas le lendemain est de 0,4.

On note C l'état « Hugo court » et R l'état « Hugo ne court pas ».

Pour tout entier naturel n, on note :

- c_n la probabilité de l'évènement « Hugo court le $(n+1)$-ième jour » ;
- r_n la probabilité de l'évènement « Hugo ne court pas le $(n+1)$-ième jour » ;
- P_n la matrice $\begin{pmatrix} c_n & r_n \end{pmatrix}$ correspondant à l'état probabiliste le $(n+1)$-ième jour.

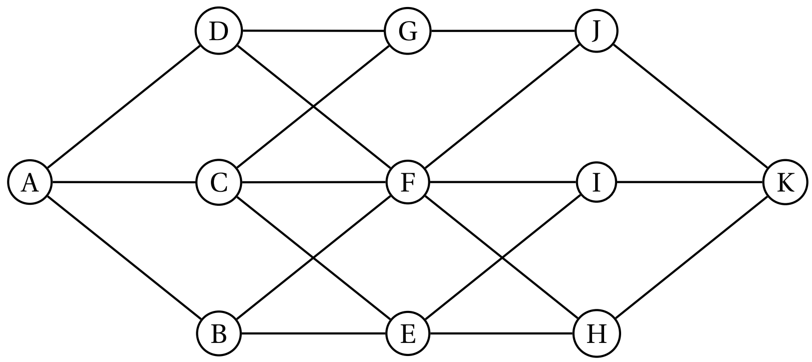
Le 1er janvier 2014, motivé, le jeune homme court.
On a donc : $P_0 = \begin{pmatrix} c_0 & r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets C et R.
2. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
3. On donne $M^6 = \begin{pmatrix} 0{,}750\,016 & 0{,}249\,984 \\ 0{,}749\,952 & 0{,}250\,048 \end{pmatrix}$á
   Quel calcul matriciel permet de déterminer la probabilité c_6 qu'Hugo coure le 7ème jour ?
   Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de c_6 .
4. **a.** Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n .
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $c_{n+1} = 0{,}2\,c_n + 0{,}6$.
5. Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par $v_n = c_n - 0{,}75$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,2.
   Préciser le premier terme.
   b. Exprimer v_n en fonction de n.
   Déterminer la limite de la suite (v_n).
   c. Justifier que, pour tout entier naturel n, $c_n = 0{,}75 + 0{,}25 \times 0{,}2^n$.
   d. Que peut-on conjecturer concernant la probabilité qu'Hugo coure le 29 décembre 2014 ?
   e. Conjecturer alors l'état stable de ce graphe.
   Comment valider votre conjecture ?

100 Extrait de la session « Asie », 22 juin 2016

Partie A

On considère le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous.



1. En justifiant la réponse, dire si ce graphe admet une chaîne eulérienne.
   Si oui, donner une telle chaîne.
2. On considère la matrice M ci-après (a, b, c et d sont des nombres réels).

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   a. Déterminer les réels a, b, c et d pour que la matrice M représente la matrice d'adjacence associée au graphe $\mathcal{G}$, les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique.

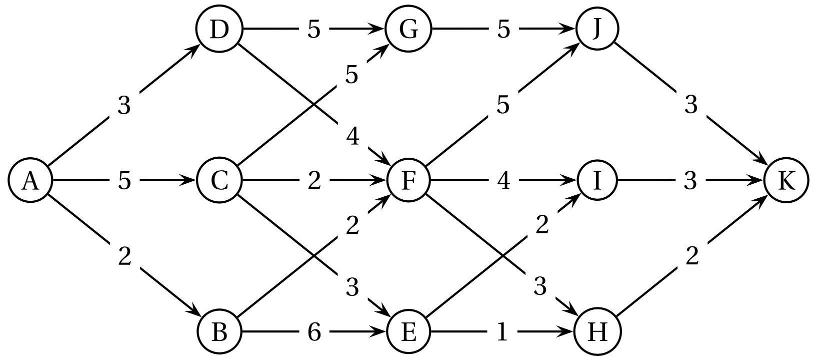
   b. On donne

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 10 & 8 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 5 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 10 & 13 & 6 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 11 & 16 & 9 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 7 & 12 & 8 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 10 & 11 & 7 & 0 & 0 & 0 & 10 & 10 & 7 & 0 \\ 0 & 13 & 16 & 12 & 0 & 0 & 0 & 13 & 13 & 12 & 0 \\ 0 & 6 & 9 & 8 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 7 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 10 & 13 & 5 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 10 & 13 & 5 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 7 & 12 & 7 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

   Déterminer, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant A à J.
   Préciser ces chemins.

Partie B

On oriente et on pondère le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessus pour qu'il représente un réseau d'irrigation.



- Le sommet A correspond au départ d'eau, le sommet K au bassin d'infiltration et les autres sommets représentent les stations de régulation.
- Les arêtes représentent les canaux d'irrigation et les flèches, le sens du ruissellement.
- La pondération donne, en km, les distances entre les différentes stations du réseau.

Déterminer un chemin de longueur minimale entre le départ d'eau en A et le bassin d'infiltration en K et donner sa longueur.

101 Extrait de la session « Antilles-Guyane », 23 juin 2016

Les parties A et B sont indépendantes.

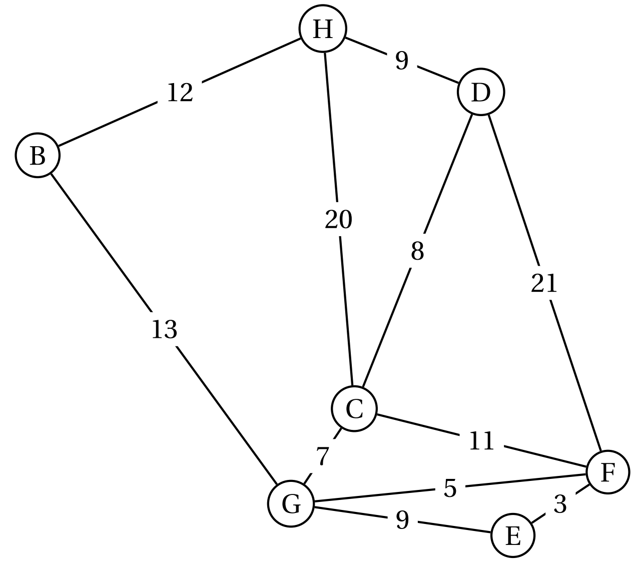
Partie A

Des touristes sont logés dans un hôtel H.

Un guide souhaite faire visiter la région à ces touristes en empruntant les routes signalées comme d'intérêt touristique par l'office du tourisme.

Les tronçons de route qu'il souhaite emprunter sont représentés sur le graphe ci-contre.

Le long de chaque arête figure la distance en kilomètres des différents tronçons.



1. **a.** Le guide peut-il emprunter tous les tronçons de route en passant une et une seule fois sur chacun d'eux, en partant de l'hôtel et en y revenant ? Justifier la réponse.

   b. Le guide peut-il emprunter tous les tronçons de route en passant une et une seule fois sur chacun d'eux, en partant de l'hôtel mais sans forcément y revenir ? Justifier la réponse.

2. Un musée est situé en E.
   Déterminer le plus court chemin menant de l'hôtel H au musée E. Justifier la réponse.

Partie B

L'office de tourisme évalue chaque année les hôtels de sa région et répertorie les meilleurs sur son site internet.
On admet que, dans cette région, la création ou la disparition d'hôtels est négligeable.
On constate que, chaque année :

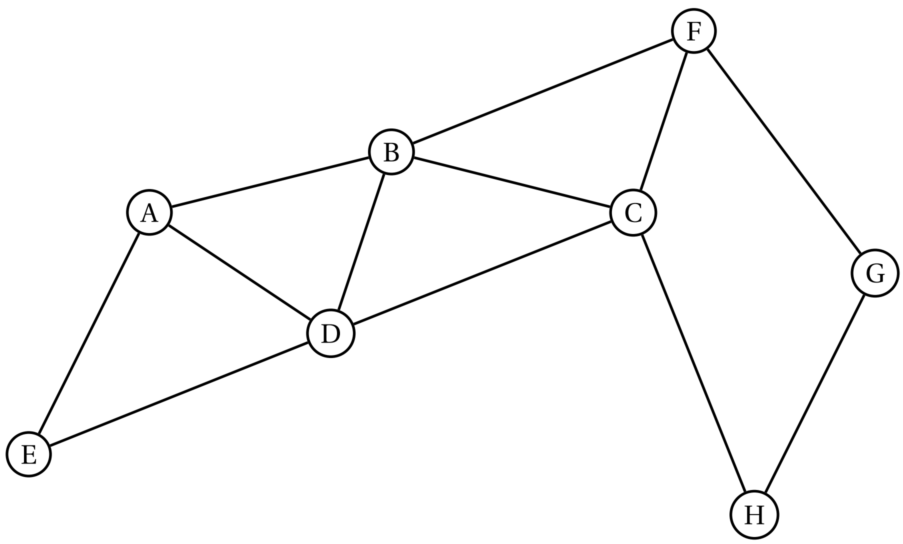
- 10 % des hôtels répertoriés ne seront plus répertoriés l'année suivante ;
- 20 % des hôtels non répertoriés sur le site seront répertoriés l'année suivante.

1. Réaliser un graphe décrivant cette situation (on notera R l'évènement « l'hôtel est répertorié » et $\overline{R}$ son évènement contraire).
2. Écrire la matrice de transition de ce graphe.
3. En 2015, 30 % des hôtels de la région étaient répertoriés.
   Quel pourcentage d'hôtels sera répertorié en 2016 ? en 2017 ?
4. Quel pourcentage d'hôtels serait répertorié à long terme ?

102 Extrait de la session « Métropole – La Réunion », 14 septembre 2016

Un parc de loisirs décide d'ouvrir une nouvelle attraction pour les jeunes enfants : un parcours pédestre où chaque enfant doit recueillir, sur différents lieux, des indices pour résoudre une énigme.

Le parcours est représenté par le graphe ci-dessous.
Les sommets représentent des lieux où sont placés les indices ; les arêtes représentent des chemins pédestres qui les relient.



Partie A

1. Un enfant pourra-t-il parcourir chaque chemin pédestre du circuit une fois et une seule ? Si oui, indiquer un circuit possible et sinon expliquer pourquoi.
2. On note M la matrice d'adjacence associée à ce graphe (les sommets sont pris dans l'ordre alphabétique).

   On donne la matrice $M^4 = \begin{pmatrix} 20 & 18 & 20 & 21 & 11 & 13 & 5 & 5 \\ 18 & 32 & 25 & 25 & 17 & 16 & 10 & 10 \\ 20 & 25 & 31 & 19 & 13 & 13 & 14 & 5 \\ 21 & 25 & 19 & 31 & 13 & 21 & 4 & 12 \\ 11 & 17 & 13 & 13 & 11 & 6 & 4 & 3 \\ 13 & 16 & 13 & 21 & 6 & 20 & 3 & 13 \\ 5 & 10 & 14 & 4 & 4 & 3 & 9 & 1 \\ 5 & 10 & 5 & 12 & 3 & 13 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

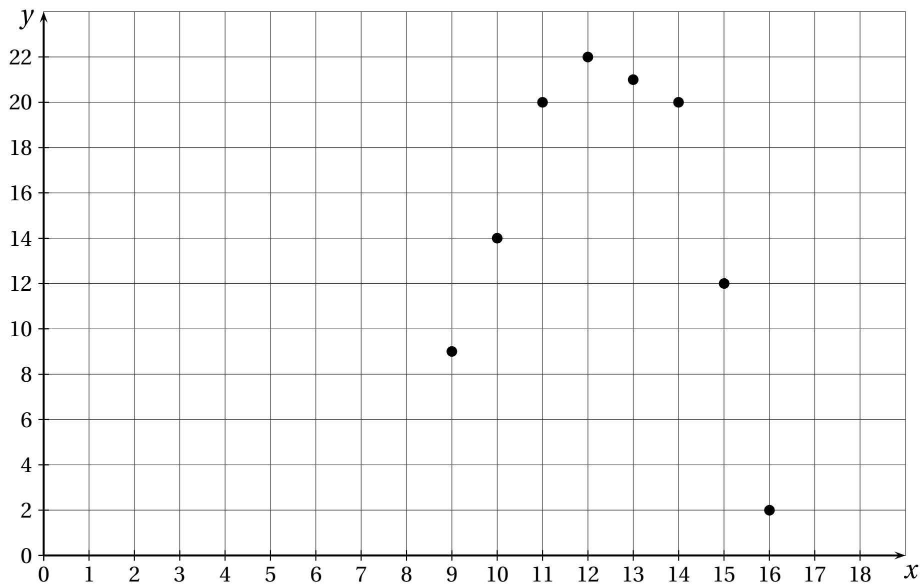
   Déterminer le nombre de parcours allant de E à H en 4 chemins pédestres.

   Les citer tous.

Partie B

Afin d'améliorer la qualité de ses services, une étude statistique a relevé la durée moyenne d'attente en minutes à la billetterie du parc en fonction de l'heure.
Ce relevé a eu lieu chaque heure de 9 h à 16 h.

On obtient le relevé suivant :



Ainsi, à 10 h, il y avait 14 minutes d'attente à la billetterie.
On souhaite modéliser cette durée d'attente par une fonction qui à l'heure associe la durée d'attente en minutes. Ainsi, il sera possible d'avoir une estimation de la durée d'attente.
On choisit de modéliser cette situation à l'aide de la fonction f définie par :

$$f(x) = a x^2 + b x + c$$

avec a, b, c des réels et a non nul telle que les trois points $(9;9)$, $(11;20)$ et $(16;2)$ appartiennent à la représentation graphique de f.

1. Calculer les trois réels a, b et c.
2. En utilisant ce modèle, déterminer sur quelle(s) plage(s) horaire(s) l'attente peut être inférieure à dix minutes.

103 Extrait de la session « Antilles-Guyane », septembre 2016

Dans une salle de sport, trois activités sont proposées : Pilates (P), Step (S) et Zumba (Z).
D'une semaine sur l'autre les abonnés peuvent changer d'activité.
Au 1er septembre 2015, il y a 10 % des abonnés inscrits en Pilates, 85 % en Step et 5 % en Zumba.
D'après l'analyse des données des années précédentes, le gérant prévoit que, d'une semaine sur l'autre :

- si l'abonné était en Pilates, la semaine suivante il conserve Pilates dans 30 % des cas, sinon il choisit Step dans 10 % des cas et Zumba dans 60 % des cas ;
- si l'abonné était en Step, la semaine suivante il conserve Step dans 30 % des cas, sinon il choisit Pilates dans 50 % des cas et Zumba dans 20 % des cas ;
- si l'abonné était en Zumba, la semaine suivante il conserve Zumba dans 20 % des cas, sinon il choisit Pilates dans 20 % des cas et Step dans 60 % des cas.

On considère qu'il n'y a pas de nouveaux abonnés et pas de départ tout au long de l'année.

Soit $E_n = \begin{pmatrix} p_n & s_n & z_n \end{pmatrix}$, la matrice ligne décrivant l'état probabiliste de la répartition parmi les trois activités P, S et Z, n semaines après le 1er septembre 2015.

1. Donner, sans justification, la matrice E_0.

2. Traduire la situation par un graphe probabiliste de sommets P, S et Z.

3. On donne M la matrice carrée 3×3 de transition respectant l'ordre P, S et Z.

$$M = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,6 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

  a. Préciser la signification du coefficient 0,5 dans la matrice M.

  b. Calculer E_1.

  c. Déterminez la répartition prévisible dans chaque activité au bout de trois semaines.

4. Peut-on affirmer, à 10^{-2} près, qu'au bout de 6 semaines environ $1/3$ des abonnés se répartissent dans chaque activité ?

5. Au 1er septembre 2015 on compte 120 abonnés dans cette salle de sport.
Combien peut-on prévoir d'abonnés dans chaque activité, 8 semaines après cette date ?

6. **a.** Conjecturer la valeur exacte des coefficients de la matrice ligne E correspondant à l'état probabiliste stable.

  b. Vérifier cette conjecture.

104 Extrait de la session « Nouvelle-Calédonie », 16 novembre 2016

Pierre prend des cours de natation ; il effectue plusieurs plongeons.
Lorsque Pierre réussit un plongeon, il prend confiance en lui et la probabilité qu'il réussisse le plongeon suivant est de 0,7.
Par contre, lorsqu'il ne réussit pas un plongeon, la probabilité qu'il réussisse le plongeon suivant est égale à 0,2.
On suppose que Pierre a réussi son premier plongeon.
L'état « plongeon réussi » est noté R.
L'état « plongeon non réussi » est noté $\overline{R}$.
Pour tout entier naturel $n > 1$, la probabilité que Pierre réussisse son n-ième plongeon est notée a_n, tandis que la probabilité que Pierre ne réussisse pas son n-ième plongeon est notée b_n.
La matrice ligne $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ donne l'état probabiliste du système lors du n-ième plongeon.

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets R et $\overline{R}$.
2. Donner la matrice de transition M associée à ce graphe, les sommets R et $\overline{R}$ étant classés dans cet ordre.
3. Justifier que $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Avec la calculatrice, déterminer la probabilité que Pierre réussisse son quatrième plogeon.
5. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = 0{,}5\,a_n + 0{,}2$.
6. Lorsque la probabilité que Pierre réussisse son plongeon devient inférieure ou égale à 0,41, le maître-nageur demande à Pierre de faire une pause.

   On cherche alors à déterminer au bout de combien d'essais Pierre arrête sa série de plongeons.

   On cherche donc à déterminer le plus petit entier naturel $n \geqslant 1$ tel que $a_n \leqslant 0{,}41$.

   Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il permette de répondre à la question posée.

   Initialisation
   Affecter à N la valeur 1
   A prend la valeur 1

   Traitement
   Tant que ....
       N prend la valeur ....
       A prend la valeur ....
   Fin Tant que

   Sortie
   Afficher ....

7. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = a_n - 0{,}4.$$

   a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b. Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_n = 0{,}6 \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}4$.
   c. Déterminer par le calcul le plus petit entier naturel n tel que $a_n \leqslant 0{,}41$.
   d. Au bout de combien d'essais Pierre arrête-t-il sa série de plongeons ?

105 Extrait de la session « Amérique du Sud », 24 novembre 2016 (6 points)

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Un groupe de touristes a réservé toutes les chambres d'un hôtel-restaurant à Venise qui propose tous les soirs à ses pensionnaires le choix entre un menu gastronomique et un menu traditionnel.
On considère, pour la modélisation, que chaque soir les clients choisissent un des deux menus et que le restaurant est réservé aux clients de l'hôtel.
Une étude sur les habitudes des clients montre que, si un soir donné, un client choisit le menu gastronomique, il choisit également le menu gastronomique le soir suivant dans 60 % des cas.
Si le client choisit le menu traditionnel un soir donné, il choisit également le menu traditionnel le soir suivant dans 70 % des cas.

Afin de mieux prévoir ses commandes pour la saison estivale, le gérant souhaite connaître la proportion de clients choisissant le menu gastronomique ou le menu traditionnel à partir du 1er juin 2015. Ce soir-là, 55 % des clients ont choisi le menu gastronomique.

On note g_0 la probabilité qu'un client ait choisi le menu gastronomique le soir du 1er juin 2015 ; on a donc $g_0 = 0{,}55$.
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note g_n la probabilité qu'un client choisi au hasard prenne le menu gastronomique le n-ième soir après le 1er juin 2015.
Ainsi, g_1 est la probabilité qu'un client ait choisi le menu gastronomique le soir du 2 juin 2015.
De la même façon, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note t_n la probabilité qu'un client, choisi au hasard, prenne le menu traditionnel le n-ième soir après le 1er juin 2015.
On note P_n la matrice $\begin{pmatrix} g_n & t_n \end{pmatrix}$ correspondant à l'état probabiliste au n-ième soir.
On note G l'état « le client choisit le menu gastronomique » et T l'état « le client choisit le menu traditionnel ».

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets G et T.

Dans la suite de l'exercice, on admet que la matrice de transition M de ce graphe, en considérant les sommets dans l'ordre alphabétique, est $M = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

2. **a.** Donner la matrice P_0 correspondant à l'état initial.

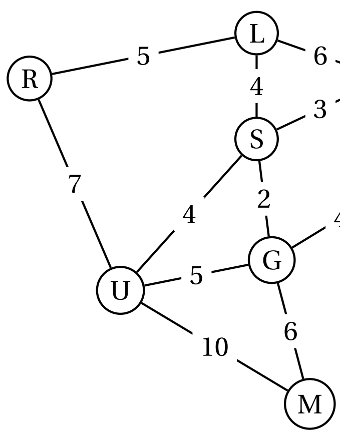
b. Calculer la probabilité qu'un client choisisse le menu gastronomique le 4 juin 2015. On arrondira le résultat au centième.

3. **a.** Déterminer la matrice $P = \begin{pmatrix} g & t \end{pmatrix}$ correspondant à l'état stable du graphe probabiliste.

b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

L'hôtel propose également à ses clients des balades en gondole sur les canaux de Venise.
Le graphe ci-dessous représente les principaux canaux de Venise empruntés par le gondolier.



C : Ca'Pesaro
G : Palazzo Grimani di San Luca
L : Palazzo Labia
M : Piazza San Marco
P : Ponte Di Rialto
R : Piazzale Roma
S : Campo Di San Polo
U : Universita Ca'Foscari

Chaque arête représente un canal et chaque sommet un lieu de la ville.
Le poids de chaque arête représente la durée de parcours, exprimée en minutes, entre deux lieux de la ville en empruntant les canaux.
Le gondolier employé par l'hôtel inspecte régulièrement les canaux pour en vérifier la navigabilité.
Il souhaite optimiser son trajet en inspectant une fois et une seule chaque canal.

1. Justifier qu'un tel trajet est possible et indiquer quels sont les lieux possibles de départ et d'arrivée.

2. Déterminer la durée pour effectuer ce trajet.

106 Extrait de la session « Nouvelle-Calédonie », mars 2017

Les jeunes abonnés (c'est-à-dire de moins de 12 ans) inscrits à une médiathèque se voient proposer une formule d'emprunt mensuel unique : chaque mois, chacun de ces abonnés peut choisir d'emprunter exclusivement soit un livre, soit un film en DVD. On suppose d'une part que le nombre d'inscrits ne varie pas et d'autre part que tous les abonnés de moins de 12 ans respectent cette formule et réalisent un emprunt chaque mois.
Les statistiques réalisées lors des mois précédents sur les choix d'emprunt des jeunes abonnés permettent au responsable de la médiathèque de constater que l'on peut modéliser ainsi la situation, d'un mois à l'antre :

- 89 % des jeunes abonnés ayant choisi d'emprunter un livre, optent encore pour un livre le mois suivant ;
- parmi les jeunes abonnés ayant emprunté un film, 14 % changent le mois suivant en décidant de choisir un livre.

Lors du lancement de cette formule d'emprunt, en janvier 2016, 80 % des abonnés de moins de 12 ans empruntent un livre.
Chaque mois, on choisit au hasard un abonné de moins de 12 ans de cette médiathèque, et pour tout entier naturel n, on note :

- a_n la probabilité que cet abonné emprunte un livre le n-ième mois après janvier 2016 ;
- b_n la probabilité que cet abonné emprunte un film le n-ième mois après janvier 2016 ;
- $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste le n-ième mois après janvier 2016.

Ainsi $P_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$.

1. **a.** Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets A et B, où
   - A est l'état « le jeune abonné choisit d'emprunter un livre » ;
   - B est l'état « le jeune abonné choisit d'emprunter un film ».

   b. Donner la matrice de transition M associée à ce graphe, en prenant les sommets A et B dans cet ordre.

   c. Déterminer la répartition des jeunes abonnés selon leur choix d'emprunt, en février 2016 et en mars 2016.
2. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $a_{n+1} = 0,89\,a_n + 0,14\,b_n$.

   b. En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $a_{n+1} = 0,75\,a_n + 0,14$.

   c. Pour déterminer au bout de combien de mois le pourcentage de jeunes abonnés empruntant un livre deviendra pour la première fois strictement inférieur à 60 %, on décide de programmer un algorithme. Modifier l'algorithme ci-dessous pour qu'il permette d'afficher la réponse à cette question.

   Initialisation
   a prend la valeur 0,8
   n prend la valeur 1
   Traitement
   Tant que $a \geqslant 0,6$
   a prend la valeur $0,85 \times a + 0,14$
   Fin Tant que
   Sortie
   Afficher n
3. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_n = a_n - 0,56$.

   a. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique de raison 0,75 et préciser son terme initial.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n : $a_n = 0,24 \times 0,75^n + 0,56$.

   c. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $a_n < 0,6$ et interpréter le résultat dans le contexte.

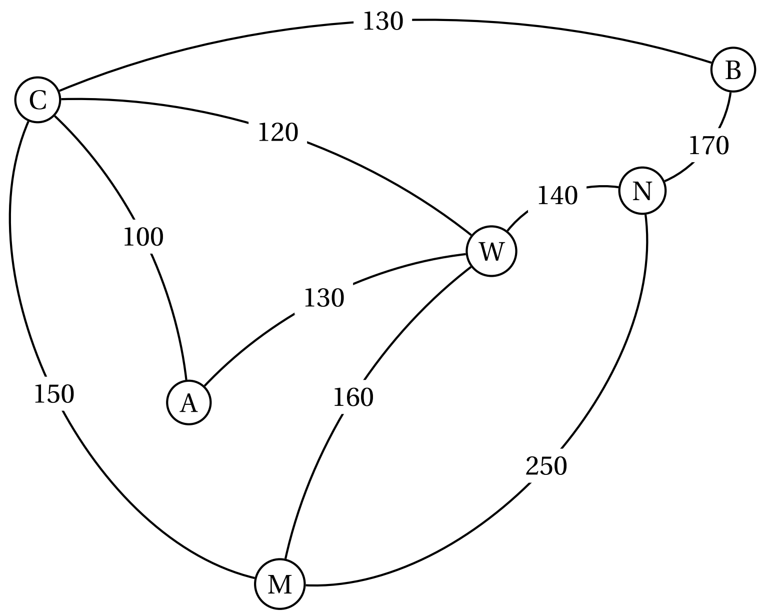
   d. À long terme, que peut-on penser de la probabilité qu'un jeune abonné choisisse d'emprunter un livre ?

107 Extrait de la session « Pondichéry », 26 avril 2017

Alexis part en voyage dans l'Est des États-Unis. Il souhaite visiter les villes suivantes :

Atlanta (A), Boston (B), Chicago (C), Miami (M), New York (N) et Washington (W).

Une compagnie aérienne propose les liaisons suivantes représentées par le graphe ci-dessous :



Les nombres présents sur chacune des branches indiquent le tarif, en dollars, du vol en avion.

1. **a.** Quelles caractéristiques du graphe permettent d'affirmer qu'il existe un trajet qui permet à Alexis d'emprunter chaque liaison aérienne une et une seule fois ?

   b. Donner un exemple d'un tel trajet.

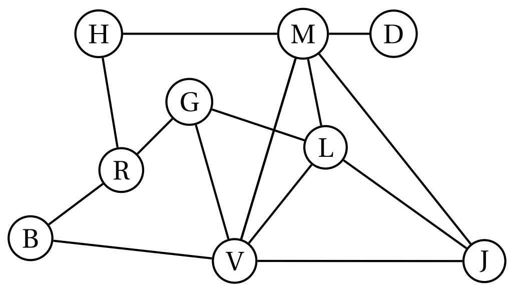
2. Alexis veut relier Boston à Miami.
   En utilisant un algorithme, déterminer le trajet le moins cher ainsi que le coût de ce trajet.

3. **a.** Donner la matrice d'adjacence P de ce graphe en classant les sommets par ordre alphabétique.

   b. Alexis souhaite aller d'Atlanta à Boston en utilisant au maximum trois liaisons aériennes.
   Combien y a-t-il de trajets possibles ? Justifier la démarche puis décrire chacun de ces trajets.

108 Extrait de la session « Amérique du Nord », 2 juin 2017 (4 points)

Sarah, une jeune étudiante en géologie, souhaite partir en voyage en Islande avec des amis. Elle a loué une voiture tout terrain pour pouvoir visiter les lieux remarquables qu'elle a sélectionnés. Elle a construit le graphe ci-dessous dont les sommets représentent les lieux à visiter et les arêtes représentent les routes ou pistes :



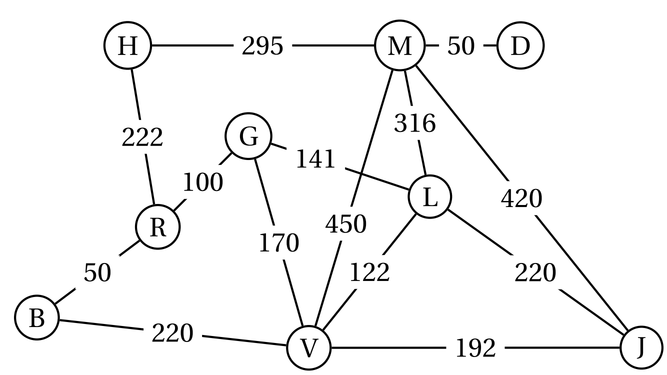
B : Le lagon bleu.
H : Rocher Hvitserkur.
M : Lac de Mývatn.
D : Chute d'eau de Dettifoss.
J : Lagune glacière de Jökulsárlón.
R : Capitale Reykjavik.
G : Geyser de Geysir.
L : Massif du Landmannalaugar.
V : Ville de Vik.

1. Dans cette question, chaque réponse sera justifiée.
   a. Déterminer l'ordre du graphe.
   b. Déterminer si le graphe est connexe.
   c. Déterminer si le graphe est complet.
2. Sarah désire emprunter toutes les routes une et une seule fois. Déterminer, en justifiant, si cela est possible.
3. On appelle M la matrice associée au graphe précédent sachant que les sommets sont placés dans l'ordre alphabétique. On donne ci-dessous une partie de la matrice M ainsi que la matrice M^4 :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M^4 = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 16 & 8 & 14 & 13 & 15 & 2 & 10 \\ 3 & 5 & 5 & 6 & 9 & 11 & 6 & 3 & 12 \\ 16 & 5 & 24 & 11 & 23 & 21 & 26 & 5 & 20 \\ 8 & 6 & 11 & 10 & 13 & 14 & 9 & 3 & 14 \\ 14 & 9 & 23 & 13 & 28 & 29 & 29 & 8 & 30 \\ 13 & 11 & 21 & 14 & 29 & 38 & 32 & 15 & 40 \\ 15 & 6 & 26 & 9 & 29 & 32 & 43 & 14 & 34 \\ 2 & 3 & 5 & 3 & 8 & 15 & 14 & 15 & 21 \\ 10 & 12 & 20 & 14 & 30 & 40 & 34 & 21 & 49 \end{pmatrix}$$

   a. Il manque certains coefficients de la matrice M.
   Compléter et recopier uniquement la partie manquante de cette matrice.
   b. Donner, en le justifiant, le nombre de chemins de longueur 4 permettant d'aller de B à D.
4. Sur le graphe pondéré ci-contre, on a indiqué sur les arêtes les distances en kilomètre entre les différents lieux.

   Déterminer à l'aide de l'algorithme de Dijkstra la distance minimale permettant d'aller du sommet B (Lagon bleu) au sommet D (Chute d'eau de Dettifoss).
   Préciser alors le trajet à emprunter.



109 Extrait de la session « Liban », 5 juin 2017

Les parties A *et* B *sont indépendantes*

Partie A

Deux opérateurs Alpha et Bravo se partagent le marché de la téléphonie mobile dans un pays.
En 2015, l'opérateur Alpha possède 30 % du marché de téléphonie mobile. Le reste appartient à l'opérateur Bravo.
On étudie l'évolution dans le temps du choix des abonnés de 2015 pour l'un ou l'autre des opérateurs. Chaque abonné conserve un abonnement téléphonique, soit chez l'opérateur Alpha soit chez l'opérateur Bravo.
On estime que, chaque année :

- 12 % des abonnés de l'opérateur Alpha le quittent et souscrivent un abonnement chez l'opérateur Bravo.
- 86 % des abonnés de l'opérateur Bravo lui restent fidèles, les autres le quittent pour l'opérateur Alpha.

On modélise cette situation par un graphe probabiliste à deux sommets Alpha et Bravo :

- A est l'évènement : « l'abonné est chez l'opérateur Alpha » ;
- B est l'évènement : « l'abonné est chez l'opérateur Bravo ».

1. Dessiner ce graphe probabiliste.
On admet que la matrice de transition de ce graphe probabiliste, en considérant les sommets dans l'ordre alphabétique, est : $M = \begin{pmatrix} 0,88 & 0,12 \\ 0,14 & 0,86 \end{pmatrix}$.
On note pour tout entier naturel n :
- a_n la probabilité qu'un abonné soit chez l'opérateur Alpha l'année $2015 + n$;
- b_n la probabilité qu'un abonné soit chez l'opérateur Bravo l'année $2015 + n$.

On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année $2015 + n$.

2. Donner a_0 et b_0.

3. Montrer qu'en 2018, il y aura environ 44,2 % des abonnés chez l'opérateur Alpha.

4. Les deux opérateurs voudraient connaître la répartition de l'ensemble des abonnés sur le long terme. On note $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ l'état stable de la répartition des abonnés.

a. Montrer que les nombres x et y sont solutions du système $\left\{\begin{array}{l} 0,12\,x - 0,14\,y = 0 \\ x + y = 1 \end{array}\right.$.

b. Résoudre le système précédent dans l'ensemble des réels.

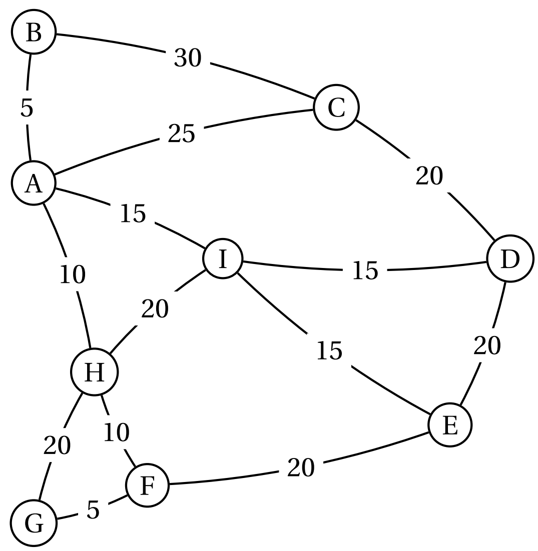
c. Déterminer la répartition des abonnés entre les deux opérateurs au bout d'un grand nombre d'années. Arrondir les pourcentages à 0,1 %.

Partie B

Un opérateur français doit développer son réseau de fibre optique dans la région des stations de ski notées A, B, C, D, E, F, G, H, I à l'approche de la saison touristique. À ce jour, seule la station C est reliée au réseau national de fibre optique.
Le coût des tronçons du réseau de fibre optique varie selon le relief des montagnes et des vallées.
L'opérateur a mené une étude afin de déterminer son plan de déploiement.

Dans le graphe ci-dessous :

- les sommets représentent les stations de ski ;
- les arêtes représentent les différents tronçons qu'il est possible de déployer ;
- le poids de chaque arête correspond au coût associé, en milliers d'euros.



1. À l'aide de l'algorithme de Dijkstra, déterminer le tracé de fibre optique le moins cher à déployer, entre les stations C et G.

2. Déterminer, en milliers d'euros, le coût de ce tracé.

110 Extrait de la session « Centres étrangers », 13 juin 2017

Un parti politique organise une élection en son sein pour désigner son candidat à l'élection présidentielle. Seuls les adhérents de ce parti peuvent voter à cette élection et ils ont le choix entre deux candidats A et B.
Pendant la campagne électorale, certains adhérents indécis changent d'avis.
Un institut de sondage consulte chaque mois le même échantillon d'adhérents et recueille leurs intentions de vote.
Il observe que l'évolution de l'état de l'opinion peut être modélisée de la façon suivante.

Chaque mois,

- 5 % des adhérents ayant déclaré vouloir voter pour le candidat A le mois précédent changent d'avis et déclarent vouloir voter pour le candidat B.
- 3 % des adhérents ayant déclaré vouloir voter pour le candidat B le mois précédent déclarent vouloir voter pour le candidat A.

Au début de la campagne électorale, 65 % des adhérents déclarent vouloir voter pour le candidat A. On représente ce modèle par un graphe probabiliste $(\mathscr{G})$ de sommets A et B où

- A est l'évènement : « l'adhérent déclare vouloir voter pour le candidat A » ;
- B est l'évènement : « l'adhérent déclare vouloir voter pour le candidat B ».

Dans la suite de l'exercice, on note

- a_n la probabilité qu'un adhérent déclare vouloir voter pour le candidat A, le n-ième mois après le début de la campagne. On a donc $a_0 = 0{,}65$.
- b_n la probabilité qu'un adhérent déclare vouloir voter pour le candidat B, le n-ième mois après le début de la campagne.

On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste correspondant aux intentions de vote le n-ième mois après le début de la campagne. On a donc $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}35 \end{pmatrix}$.

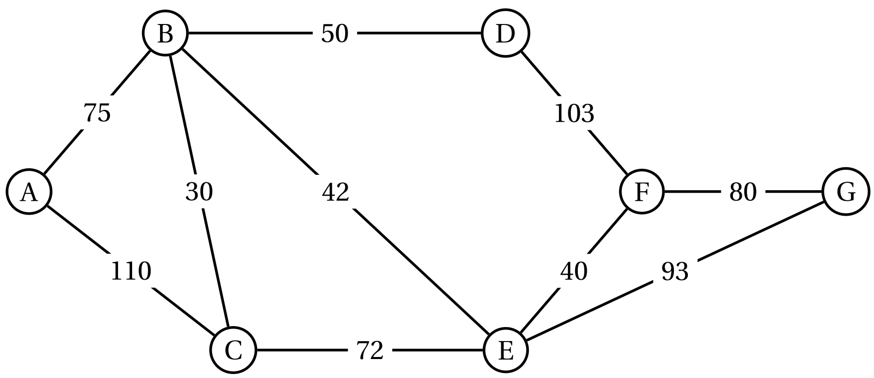
1. **a.** Dessiner le graphe probabiliste $(\mathscr{G})$ de sommets A et B.
   b. Écrire la matrice de transition M associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.
2. Démontrer que $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}628 & 0{,}372 \end{pmatrix}$.
3. On note $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ l'état stable associé à ce graphe.
   a. Démontrer que les nombres a et b sont solutions du système :
   $$\begin{cases} 0{,}05\,a - 0{,}03\,b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$$
   b. Résoudre le système précédent.
   c. Interpréter dans le contexte de l'exercice la solution obtenue à la question **3. b** .
4. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :
   $$a_{n+1} = 0{,}92\,a_n + 0{,}03$$
   b. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = a_n - 0{,}375$.
   Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}92$ et préciser le premier terme.
   c. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n et en déduire :
   $$a_n = 0{,}275 \times 0{,}92^n + 0{,}375$$
5. La campagne électorale dure 11 mois.
   Si la modélisation de l'institut de sondage est valable, quel candidat sera probablement élu ? Justifier la réponse.

111 Extrait de la session « Antilles-Guyane », 14 juin 2017

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Le graphe ci-dessous représente le plan d'un centre de vacances. Les arêtes représentent les allées et les sommets, les carrefours. On a indiqué sur chaque arête la longueur en mètre des allées entre deux carrefours.



1. Le service d'entretien doit nettoyer toutes les allées. En partant du carrefour C, peut-on nettoyer toutes les allées en passant une et une seule fois par chacune d'elles ? Justifier la réponse.
2. Existe-t-il un parcours permettant de nettoyer toutes les allées en passant une et une seule fois par chacune d'elles et de revenir au point de départ ? Justifier la réponse.
3. Déterminer le trajet le plus court pour aller du carrefour A au carrefour G.

Partie B

Dans ce centre de vacances, les vacanciers peuvent, chaque jour, déjeuner au restaurant du centre ou à l'extérieur. On constate chaque jour que :

- 5 % des vacanciers ayant déjeuné au centre de vacances ne se réinscrivent pas pour le lendemain ;
- 20 % des vacanciers ayant déjeuné à l'extérieur s'inscrivent pour déjeuner au centre de vacances le lendemain.

On note D l'état « Déjeuner au centre de vacances » et E l'évènement « Déjeuner à l'extérieur ».

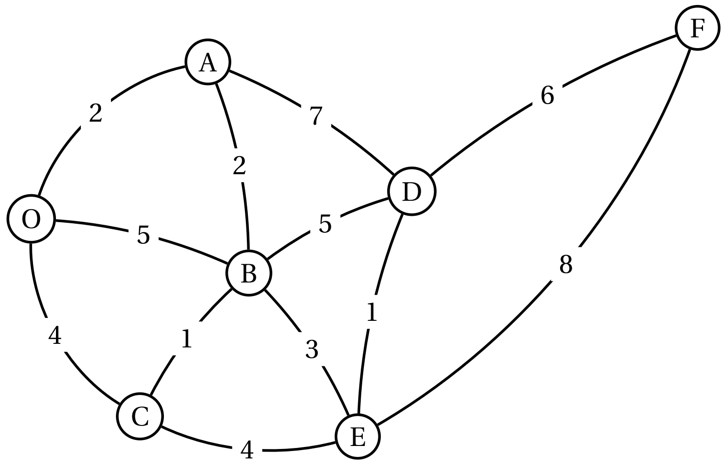
1. Construire un graphe modélisant cette situation.
2. Écrire la matrice de transition de ce graphe, les sommets étant rangés selon l'ordre alphabétique.
3. Le premier jour, le quart des vacanciers a déjeuné au centre de vacances.
   Quel pourcentage de vacanciers déjeunera au centre de vacances le deuxième jour ? Le cinquième jour ?
4. L'état $\begin{pmatrix}0,5 & 0,5\end{pmatrix}$ est-il stable ?
5. Peut-on affirmer qu'à terme, si les comportements des vacanciers restent les mêmes, 75 % des vacanciers prendront leur déjeuner au centre ?

112 Extrait de la session « Polynésie », 16 juin 2017

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Alex a téléchargé sur son smartphone un jeu lui permettant de combattre des animaux virtuels par localisation GPS. Le graphe pondéré représenté ci-dessous illustre le trajet qu'Alex doit suivre en marchant dans les rues de sa ville et le nombre d'animaux virtuels qu'il doit combattre sur la route suivie



À l'aide d'un algorithme, déterminer le nombre minimal de créatures qu'Alex doit combattre s'il part du point O pour arriver au point F de la ville. Détailler les étapes de l'algorithme.

Partie B

Alex retrouve d'autres personnes, ayant le même jeu, dans le parc de la ville dans le but de comparer le nombre de créatures qu'ils ont combattues.
Le premier jour, 8 personnes se sont retrouvées dans le parc. Le second jour, on comptait 25 personnes et le troisième jour, 80 personnes se sont retrouvées dans le parc.
Soit f la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont trois nombres réels et x un nombre entier compris entre 1 et 10. On admet que la fonction f modélise le nombre de personnes qui se retrouvent dans le parc le x-ième jour.

1. Traduire l'énoncé par un système de trois équations à trois inconnues a, b et c.
2. Vérifier que ce système est équivalent à l'équation $AX = B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 8 \\ 25 \\ 80 \end{pmatrix}$$

3. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -1 & 0{,}5 \\ -2{,}5 & 4 & -1{,}5 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.
   a. Calculer $M \times A$.
   b. Que représente la matrice M pour la matrice A ?
4. Le parc de la ville a une capacité d'accueil de 2 500 personnes.
   Selon ce modèle, le parc risque-t-il de refuser d'accueillir des personnes un de ces dix jours ?
   Justifier la réponse.

113 Extrait de la session « Métropole – Réunion », 21 juin 2017

Partie A

Dans un jeu vidéo, une suite d'énigmes est proposée au joueur. Ces énigmes sont classées en deux catégories : les énigmes de catégorie A sont les énigmes faciles ; les énigmes de catégorie B sont les énigmes difficiles.
Le choix des énigmes successives est aléatoire et vérifie les conditions suivantes :

- la première énigme est facile ;
- si une énigme est facile, la probabilité que la suivante soit difficile est égale à 0,15 ;
- si une énigme est difficile, la probabilité que la suivante soit facile est égale à 0,1.

Pour $n \geqslant 1$, on note :

- a_n la probabilité que l'énigme numéro n soit facile (de catégorie A) ;
- b_n la probabilité que l'énigme numéro n soit difficile (de catégorie B) ;
- $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste pour l'énigme numéro n.

1. Donner la matrice P_1.

2. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.

3. Écrire la matrice M associée à ce graphe, puis donner la matrice ligne P_2.

4. Sachant que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $a_n + b_n = 1$, montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$a_{n+1} = 0,75\, a_n + 0,1$$

5. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $v_n = a_n - 0,4$.

  a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

  b. Exprimer v_n en fonction de n, puis montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$:

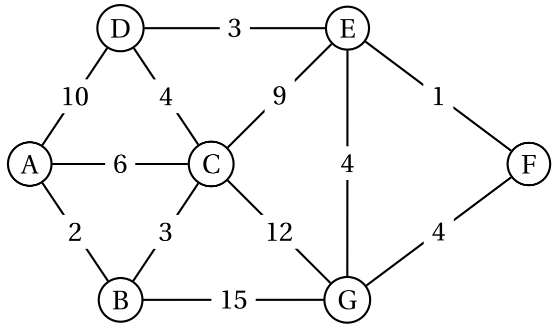
$$a_n = 0,8 \times 0,75^n + 0,4$$

  c. Préciser la limite de la suite (v_n).

  d. Une revue spécialisée dans les jeux vidéo indique que plus le joueur évolue dans le jeu, plus il risque d'avoir à résoudre des énigmes difficiles. Que penser de cette analyse ?

Partie B

Une des énigmes consiste à réaliser un parcours en un minimum de temps. Le graphe suivant schématise le parcours. L'étiquette de chaque arête indique le temps de parcours en minute entre les deux sommets qu'elle relie. Par exemple, le temps de parcours de C vers D, ou de D à C, est égal à quatre minutes.



Quel chemin le joueur doit-il prendre pour aller de A à G en minimisant son temps de parcours ? Expliquer la démarche utilisée.

114 Extrait de la session « Asie », 22 juin 2017

Pour l'année scolaire, un professeur propose aux élèves de sa classe le choix entre deux types d'accompagnement : « Approfondissement » ou « Ouverture culturelle ».
Chaque semaine, un élève doit s'inscrire dans un et un seul des deux accompagnements proposés.
La première semaine, 20 % des élèves de la classe ont choisi « Approfondissement » et tous les autres ont choisi « Ouverture culturelle ». On admet que, chaque semaine,

- 20 % des élèves ayant choisi « Ouverture culturelle » une certaine semaine s'inscrivent en « Approfondissement » la semaine suivante ;
- 30 % des élèves ayant choisi « Approfondissement » une certaine semaine s'inscrivent en « Ouverture culturelle » la semaine suivante.

On s'intéresse à l'évolution de la répartition des élèves de cette classe entre les deux types d'accompagnement au fil des semaines.
On interroge au hasard un élève de la classe et on suit son choix d'option au fil des semaines.

1. On note A l'état « l'élève a choisi Approfondissement » et B l'état « l'élève a choisi Ouverture culturelle ».

a. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.

b. Écrire la matrice de transition M associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.

2. On note P_1 la matrice traduisant l'état probabiliste de la première semaine. Ainsi $P_1 = \begin{pmatrix}0,2 & 0,8\end{pmatrix}$.

a. Donner la matrice M^2 puis déterminer la probabilité que l'élève ait choisi « Approfondissement » lors de la troisième semaine.

b. À long terme, quelle est la probabilité qu'un élève choisisse « Approfondissement » ?

3. Pour tout entier naturel non nul n on note :

- a_n la probabilité que l'élève interrogé ait choisi « Approfondissement » lors de la n-ième semaine,
- b_n la probabilité que l'élève interrogé ait choisi « Ouverture culturelle » lors de la n-ième semaine.

Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$a_{n+1} = 0,5\,a_n + 0,2$$

4. On admet que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$a_n = 0,4 - 0,4 \times 0,5^n$$

Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation suivante :

$$0,4 - 0,4 \times 0,5^n > 0,399.$$

5. **a.** Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il affiche le plus petit entier naturel n non nul tel que $a_n > 0,399$.

Variables	N est un entier naturel A est un nombre réel
Initialisation	Affecter à N la valeur 1 Affecter à A la valeur 0,2

Traitement	……
	    | Affecter à A la valeur $0,5 \times A + 0,2$
	    | ……
	……

Sortie	Afficher N

b. Quelle est la valeur affichée par l'algorithme en sortie ?
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

115 Extrait de la session « Métropole (copies volées) », 28 juin 2017

En 2016, un institut de sondage mène une enquête régionale sur la manière dont les particuliers paient leur assurance. Les assurés se répartissent en deux catégories distinctes :

- la catégorie A, composée des assurés qui paient en agence ;
- la catégorie B, composée des assurés qui paient en ligne.

En 2016, 92 % des assurés paient en agence.
On admet que, d'une année à l'autre, 4 % des assurés de la catégorie A passent à la catégorie B et que 1 % des assurés de la catégorie B passent à la catégorie A.
On suppose que le nombre d'assurés est constant et que chaque année un assuré fait partie d'une seule catégorie.
Pour tout entier naturel n, on considère l'année $(2016+n)$ et on note :

- a_n la probabilité qu'un assuré, pris au hasard, soit de catégorie A cette année-là,
- b_n la probabilité qu'un assuré, pris au hasard, soit de catégorie B cette année-là,
- P_n la matrice ligne $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$. Ainsi $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}92 & 0{,}08 \end{pmatrix}$.

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste.
On notera A l'état « l'assuré est de catégorie A » et B l'état « l'assuré est de catégorie B ».

2. On admet que la matrice de transition M associée à cette situation est $M = \begin{pmatrix} 0{,}96 & 0{,}04 \\ 0{,}01 & 0{,}99 \end{pmatrix}$.

a. Exprimer P_1 en fonction de M et de P_0.

b. En déduire la probabilité qu'un assuré soit de catégorie A en 2017. Arrondir le résultat au centième.

3. Soit $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état stable du graphe.

a. Justifier que $\left\{\begin{array}{l} -0{,}04\,a + 0{,}01\,b = 0 \\ a + b = 1 \end{array}\right.$.

b. Résoudre le système précédent.
Quelle conclusion peut-on tirer quant à la répartition à long terme des assurés ?

4. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}95\,a_n + 0{,}01$.
On admet que, pour tout entier naturel n, $a_n = 0{,}2 + 0{,}72 \times 0{,}95^n$ et que la suite (a_n) est décroissante.

b. On souhaite déterminer au bout de combien d'années moins d'un assuré sur deux sera de catégorie A.
Recopier et compléter l'algorithme pour qu'il donne le résultat attendu.

Variables	A est un nombre réel N est un entier naturel
Initialisation	Affecter à A la valeur 0,92 Affecter à N la valeur 0
Traitement	Tant que .... Affecter à N la valeur .... Affecter à A la valeur .... Fin Tant que
Sortie	Afficher ...

c. La proportion d'assurés de catégorie A va-t-elle devenir inférieure à 0,5 ?
Si oui, à partir de quelle année ? Expliquer la démarche choisie.

116 Extrait de la session « Antilles-Guyane », 7 septembre 2017

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Une petite ville dispose d'un service municipal de location de vélos réservé à ses habitants.
Pour cette étude, on suppose que la population de la ville reste constante.
Le 1er janvier 2017, la ville compte 5 % d'abonnés parmi ses habitants. Ces dernières années, le responsable du service location a constaté que :

- 93 % des abonnements sont renouvelés ;
- 1 % des habitants qui n'étaient pas abonnés l'année précédente souscrivent un abonnement.

On note A l'état : « un habitant est abonné » et P l'état : « un habitant n'est pas abonné ».
Pour tout entier naturel n, on désigne par a_n la probabilité qu'un habitant soit abonné l'année $2017+n$ et p_n la probabilité qu'un habitant ne soit pas abonné l'année $2017+n$.
La matrice ligne $R_n = \begin{pmatrix} a_n & p_n \end{pmatrix}$ donne l'état probabiliste du nombre d'abonnés l'année $2017+n$.
Ainsi $R_0 = \begin{pmatrix} a_0 & p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}95 \end{pmatrix}$.

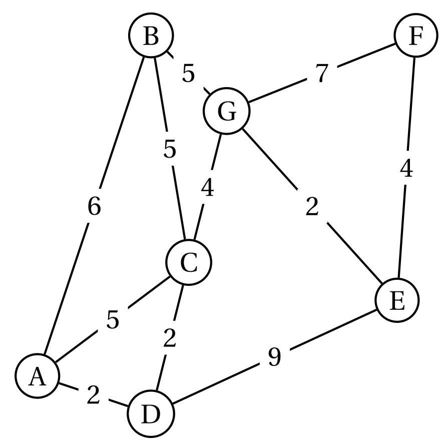
1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets A et P où le sommet A représente l'état « un habitant est abonné » et P l'état « un habitant n'est pas abonné ».
2. Déterminer la matrice de transition T de ce graphe en respectant l'ordre A puis P des sommets.
3. Déterminer R_1 .
4. Déterminer l'état probabiliste en 2021.
   Les résultats seront arrondis au millième.
5. On admet qu'il existe un état stable $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$.
   - **a.** Justifier que x et y sont solutions du système : $\begin{cases} -7x+y=0 \\ x+y=1 \end{cases}$.
   - **b.** Déterminer l'état stable de ce graphe.

Partie B

Le responsable du service de location souhaite vérifier l'état des pistes cyclables reliant les parkings à vélos de location disposés dans la ville.

On modélise la disposition des lieux par le graphe étiqueté ci-contre dont les sommets représentent les parkings à vélo.

Les poids des arêtes sont les durées moyennes de parcours, en minute, pour se rendre d'un parking à l'autre en suivant la piste cyclable.



1. Le responsable peut-il planifier un parcours partant de son bureau situé en A jusqu'à la mairie située en F en passant par toutes les pistes cyclables sans emprunter deux fois le même chemin ?
2. Le responsable est pressé.
   Déterminer le parcours le plus rapide possible permettant d'aller de A à F.

117 Extrait de la session « Métropole – La Réunion », 12 septembre 2017

Dans une commune, l'école de musique propose des cours d'éveil musical.
En 2013, 20 % des enfants de la commune suivaient les cours d'éveil musical de cette école. Chaque année, 70 % des enfants inscrits restent dans l'école l'année suivante, et par ailleurs, 20 % des enfants de la commune qui n'y étaient pas inscrits viennent s'y ajouter.
Pour tout entier naturel n, on note :

- c_n la proportion des enfants de la commune inscrits à cet éveil musical en $(2013+n)$,
- d_n la proportion des enfants de la commune qui ne sont pas inscrits à cet éveil musical en $(2013+n)$,
- $E_n = \begin{pmatrix} c_n & d_n \end{pmatrix}$ la matrice traduisant l'état probabiliste de l'année $(2013+n)$.

Ainsi, on a $E_0 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.
On choisit au hasard un enfant de la commune.

Partie A

1. Traduire la situation par un graphe probabiliste. On note :
   - C l'état « l'enfant est inscrit aux cours d'éveil musical »
   - D l'état « l'enfant n'est pas inscrit aux cours d'éveil musical »
2. Déterminer la matrice de transition A, c'est-à-dire la matrice vérifiant, pour tout entier naturel n, l'égalité $E_{n+1} = E_n \times A$.
3. Déterminer E_1 et E_2.
4. Déterminer l'état probabiliste stable en justifiant votre réponse. Interpréter les résultats.

Partie B

1. On rappelle que pour tout entier naturel n, on a $c_n + d_n = 1$.
   Justifier que pour tout entier naturel n, on a $c_{n+1} = 0{,}5\,c_n + 0{,}2$.
   On admet pour la suite de l'exercice que tout entier naturel n, $c_n = -0{,}2 \times 0{,}5^n + 0{,}4$.
2. Montrer que la suite (c_n) est croissante.
3. **a.** Proposer un algorithme affichant la proportion des enfants de la commune inscrits à cet éveil musical à partir de 2013 jusqu'à l'année $(2013+n)$, pour un nombre d'années n saisi par l'utilisateur.
   b. La proportion des enfants de la commune inscrits à cet éveil musical franchira-t-elle le seuil de 39 % ? Si oui, indiquer l'année en expliquant la démarche.
4. Le directeur de cette école affirme que si ce modèle d'évolution reste valable, la proportion d'enfants de la commune inscrits à cet éveil musical dépassera le seuil de 50 %.
   Peut-on valider cette affirmation ? Argumenter la réponse.

118 Extrait de la session « Amérique du Sud », 23 novembre 2017

Les parties A *et* B *de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.*

Partie A

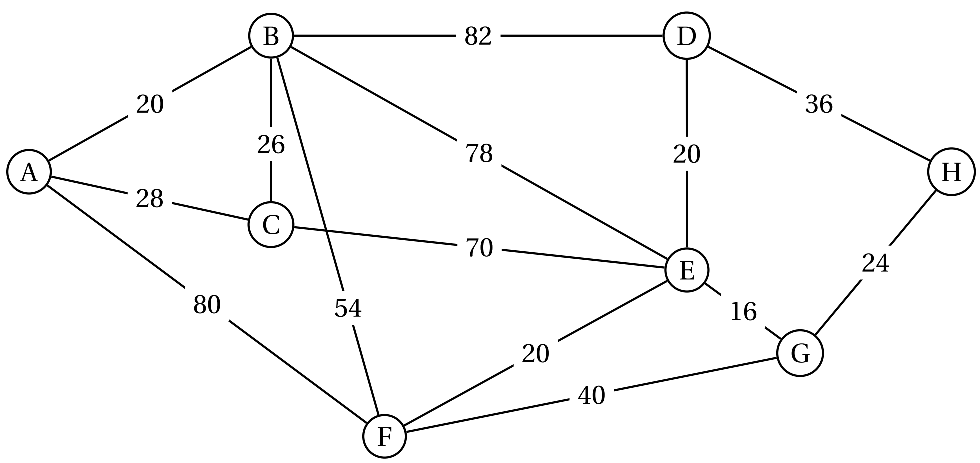
Pour les déplacements entre les principales villes d'une région, les habitants peuvent acquérir soit la carte d'abonnement bus (PassBus), soit la carte d'abonnement train (PassTrain), toutes les deux étant valables un an.
Une étude récente montre que le nombre global d'abonnements reste constant dans le temps et que, chaque année, la répartition des abonnements évolue de la manière suivante :

- 10 % des abonnements PassBus sont remplacés par des abonnements PassTrain ;
- 15 % des abonnements PassTrain sont remplacés par des abonnements PassBus.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets B et T où le sommet B représente l'état « abonné PassBus » et T l'état « abonné PassTrain ».
2. Déterminer la matrice de transition de ce graphe en respectant l'ordre B, T des sommets.
3. En 2016, les abonnements PassBus représentaient 25 % de l'ensemble des abonnements, tandis que les abonnements PassTrain en représentaient 75 %.
   Quelle sera la part, en 2019, des abonnements PassBus dans l'ensemble des abonnements ?
   Donner le résultat en pourcentage arrondi à 0,1 %.
4. Déterminer l'état stable du graphe probabiliste et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Le réseau ferroviaire de la région est schématisé par le graphe ci-dessous.
Les sommets représentent les villes et les arêtes représentent les voies ferrées.
Sur les arêtes du graphe sont indiquées les distances exprimées en kilomètre entre les villes de la région.



Déterminer, en utilisant l'algorithme de Dijkstra, le trajet le plus court pour aller de la ville A à la ville H. Préciser la longueur en kilomètre de ce trajet.

119 Extrait de la session « Nouvelle-Calédonie », 28 novembre 2017

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

En 2012, un village ne comptait qu'un seul médecin, Albert.
Début 2013, un nouveau médecin, Brigitte, s'installe dans ce village.
À l'arrivée de Brigitte, 90 % des habitants du village choisirent Albert comme médecin, les autres choisirent Brigitte.
On suppose que chaque habitant du village est patient du même médecin, Albert ou Brigitte, tout au long d'une année.
On observe, à partir de 2013, que chaque année :

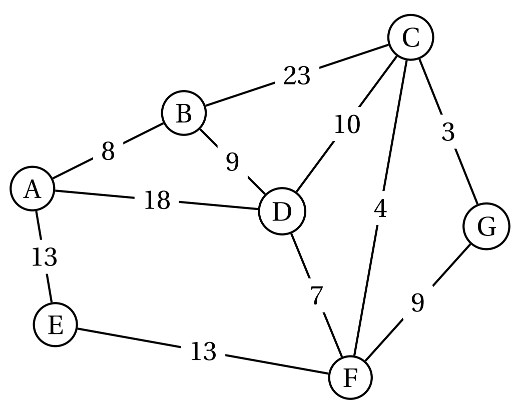
- 13 % des patients d'Albert changent de médecin et deviennent des patients de Brigitte ;
- 8 % des patients de Brigitte deviennent des patients d'Albert.

On choisit au hasard un habitant de ce village. Pour tout entier naturel n,
a_n est la probabilité que cet habitant soit un patient d'Albert pour l'année $(2013+n)$,
b_n est la probabilité que cet habitant soit un patient de Brigitte pour l'année $(2013+n)$,
$P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ est la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année $(2013+n)$.

1. Déterminer la matrice ligne P_0 de l'état probabiliste initial.
2. Représenter la situation par un graphe probabiliste.
3. Déterminer la matrice de transition M de ce graphe.
4. Montrer que $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}791 & 0{,}209 \end{pmatrix}$.
5. Exprimer P_n en fonction de P_0, M et n.
6. En déduire la matrice ligne P_4 et interpréter le résultat. Les résultats seront arrondis au millième.
7. Déterminer l'état stable $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ de la répartition des patients des médecins Albert et Brigitte.
   En donner une interprétation.

Partie B

Le médecin Albert, qui officie dans le village A, doit rendre visite à un patient d'un village voisin G.
Il a construit le graphe ci-dessous où les sommets représentent les villages alentours. Sur les arêtes sont indiquées les distances en kilomètres.



Déterminer le plus court chemin pour aller du village A au village G.

120 Extrait de la session « Pondichéry », 4 mai 2018

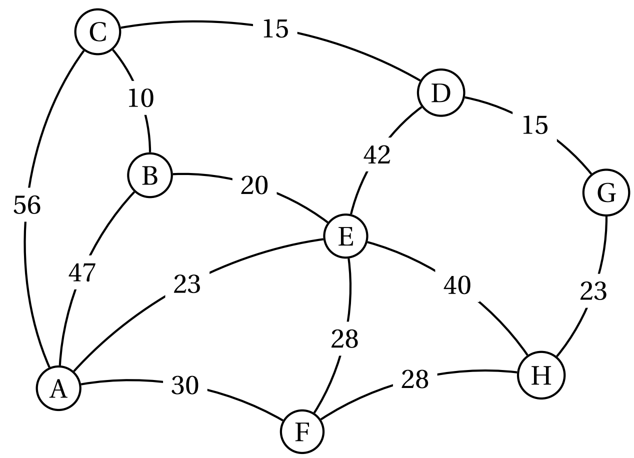
Les différentes parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Le graphe pondéré ci-contre représente les différents lieux A, B, C, D, E, F, G et H dans lesquels Louis est susceptible de se rendre chaque jour.
Le lieu A désigne son domicile et G le lieu de son site de travail.
Le poids de chaque arête représente la distance, en kilomètres, entre les deux lieux reliés par l'arête.

Déterminer le chemin le plus court qui permet à Louis de relier son domicile à son travail. On pourra utiliser un algorithme.

Préciser la distance, en kilomètres, de ce chemin.



Partie B

Afin de réduire son empreinte énergétique, Louis décide d'utiliser lors de ses trajets quotidiens soit les transports en commun soit le covoiturage.

- S'il a utilisé les transports en commun lors d'un trajet, il utilisera le covoiturage lors de son prochain déplacement avec une probabilité de 0,53 ;
- s'il a utilisé le covoiturage lors d'un trajet, il effectuera le prochain déplacement en transport en commun avec une probabilité de 0,78.

Louis décide de mettre en place ces résolutions au 1er janvier 2018.

Pour tout entier naturel n, on note :

- c_n la probabilité que Louis utilise le covoiturage n jour(s) après le 1er janvier 2018 ;
- t_n la probabilité que Louis utilise les transports en commun n jour(s) après le 1er janvier 2018 ;
- la matrice ligne $P_n = (c_n \quad t_n)$ traduit l'état probabiliste n jour(s) après le 1er janvier 2018.

Le 1er janvier 2018, Louis décide d'utiliser le covoiturage.

1. **a.** Préciser l'état probabiliste initial P_0.

b. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste. On notera « C » et « T » ses deux sommets :

- « C » pour indiquer que Louis utilise le covoiturage ;
- « T » pour indiquer que Louis utilise les transports en commun.

2. Déterminer la matrice de transition du graphe probabiliste en considérant ses sommets dans l'ordre alphabétique.

3. Calculer l'état probabiliste P_2 et interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.

4. Soit la matrice ligne $P = (x \quad y)$ associée à l'état stable du graphe probabiliste.

a. Calculer les valeurs exactes de x et de y puis en donner une valeur approchée à 0,01 près.

b. Selon ce modèle, peut-on dire qu'à long terme, Louis utilisera aussi souvent le covoiturage que les transports en commun ? Justifier la réponse.

121 Extrait de la session « Liban », 29 mai 2018

Dans un pays, deux opérateurs se partagent le marché des télécommunications mobiles.

Une étude révèle que chaque année :

- parmi les clients de l'opérateur *EfficaceRéseau*, 70 % se réabonnent à ce même opérateur et 30 % souscrivent un contrat avec l'opérateur *GenialPhone* ;
- parmi les clients de l'opérateur *GenialPhone*, 55 % se réabonnent à ce même opérateur et 45 % souscrivent un contrat avec l'opérateur *Efficaceréseau*.

On note E l'état « la personne possède un contrat chez l'opérateur *EfficaceRéseau* » et G l'état « la personne possède un contrat chez l'opérateur *GenialPhone* ».

À partir de 2018, on choisit au hasard un client de l'un des deux opérateurs.

On note également :

- e_n la probabilité que le client possède un contrat avec l'opérateur *EfficaceRéseau* au 1$^{\text{er}}$ janvier $(2018+n)$;
- g_n la probabilité que le client possède un contrat avec l'opérateur *GenialPhone* au 1$^{\text{er}}$ janvier $(2018+n)$;
- $P_n = \begin{pmatrix} e_n & g_n \end{pmatrix}$ désigne la matrice ligne traduisant l'état probabiliste du système au 1$^{\text{er}}$ janvier $(2018+n)$.

Au 1$^{\text{er}}$ janvier 2018, on suppose que 10 % des clients possèdent un contrat chez *EfficaceRéseau*. On a ainsi $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$.

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets E et G.

2. **a.** Déterminer la matrice de transition M associée au graphe en rangeant les sommets dans l'ordre alphabétique.

b. Vérifier qu'au 1$^{\text{er}}$ janvier 2020, environ 57 % des clients ont un contrat avec l'opérateur *EfficaceRéseau*.

3. **a.** On rappelle que pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = P_n \times M$.
Exprimer e_{n+1} en fonction de e_n et g_n.

b. En déduire que pour tout entier naturel n, $e_{n+1} = 0{,}25\,e_n + 0{,}45$.

4. **a.** Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous de façon à ce qu'il affiche l'état probabiliste au 1$^{\text{er}}$ janvier $(2018+n)$:

```
E ⟵ 0,1
G ⟵ 0,9
Pour I allant de 1 à N
    E ⟵ ··· × E + ···
    G ⟵ ···
Fin Pour
Afficher E et G
```

b. Déterminer l'affichage de cet algorithme pour $N = 3$. Arrondir au centième.

c. Déterminer l'état stable du système et interpréter votre réponse dans le contexte de l'exercice.

122 Extrait de la session « Amérique du Nord », 29 mai 2018

Deux entreprises concurrentes « Alphacopy » et « Bêtacopy » proposent des contrats annuels d'entretien de photocopieurs. Ces deux entreprises se partagent le marché des contrats d'entretien sur un secteur donné.
Le patron de Alphacopy remarque que, chaque année :

- 15 % des clients qui avaient souscrit un contrat d'entretien chez Alphacopy décident de souscrire un contrat d'entretien chez Bêtacopy. Les autres restent fidèles à Alphacopy ;
- 25 % des clients qui avaient souscrit un contrat d'entretien chez Bêtacopy décident de souscrire un contrat d'entretien chez Alphacopy. Les autres restent fidèles à Bêtacopy.

On définit les évènements suivants :

- A : « le client est sous contrat avec l'entreprise Alphacopy » ;
- B : « le client est sous contrat avec l'entreprise Bêtacopy ».

À partir de 2017, on choisit au hasard un client ayant un contrat d'entretien de photocopieurs et on note, pour tout entier naturel n :

- a_n la probabilité que le client soit sous contrat avec l'entreprise Alphacopy l'année $2017+n$;
- b_n la probabilité que le client soit sous contrat avec l'entreprise Bêtacopy l'année $2017+n$.

On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année $2017+n$.
L'objectif de l'entreprise Alphacopy est d'obtenir au moins 62 % des contrats d'entretien des photocopieurs.

Partie A

1. Représenter le graphe probabiliste de cette situation et donner la matrice de transition M associée à ce graphe dont les sommets sont pris dans l'ordre alphabétique.
2. Montrer que $P = \begin{pmatrix} 0{,}625 & 0{,}375 \end{pmatrix}$ est un état stable de la matrice.
3. À votre avis, l'entreprise Alphacopy peut-elle espérer atteindre son objectif ?

Partie B

En 2017, on sait que 46 % des clients ayant un contrat d'entretien de photocopieurs étaient sous contrat avec l'entreprise Alphacopy.
On a ainsi $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}46 & 0{,}54 \end{pmatrix}$.

1. On rappelle que pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = P_n \times M$.
   Démontrer que, pour tout entier naturel n,
   $$a_{n+1} = 0{,}85\,a_n + 0{,}25\,b_n$$
   puis que
   $$a_{n+1} = 0{,}60\,a_n + 0{,}25.$$
2. À l'aide de l'algorithme ci-dessous, on cherche à déterminer en quelle année l'entreprise Alphacopy atteindra son objectif.

```
n ← 0
a ← 0,46
Tant que .........
        n ← n + 1
        .........
Fin Tant que
Afficher 2017 + n
```

a. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessus.

b. Quelle est l'année en sortie de l'algorithme ? Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

3. On définit la suite (u_n) par $u_n = a_n - 0,625$ pour tout entier naturel n.

a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme u_0.

b. Exprimer u_n en fonction de n puis démontrer que, pour tout entier n,

$$a_n = -0,165 \times 0,60^n + 0,625.$$

c. Résoudre par le calcul l'inéquation $a_n \geqslant 0,62$.
Quel résultat de la question **2.** retrouve-t-on ?

123 Extrait de la session « Centres étrangers », 11 juin 2018

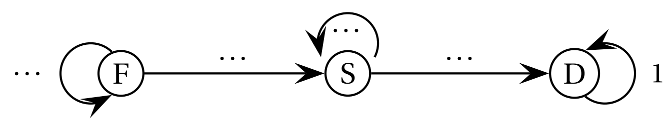
Une société d'autoroute étudie l'évolution de l'état de ses automates de péage en l'absence de maintenance.
Un automate peut se trouver dans l'un des états suivants :

- fonctionnel (F) ;
- en sursis (S) s'il fonctionne encore, mais montre des signes de faiblesse ;
- défaillant (D) s'il ne fonctionne plus.

La société a observé que d'un jour sur l'autre :

- concernant les automates fonctionnels, 90 % le restent et 10 % deviennent en sursis ;
- concernant les automates en sursis, 80 % le restent et 20 % deviennent défaillants.

1. **a.** Reproduire et compléter le graphe probabiliste ci-après qui représente les évolutions possibles de l'état d'un automate.



b. Interpréter le nombre 1 qui apparaît sur ce graphe.

c. Voici la matrice de transition $M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre F, S, D.
Préciser la signification du coefficient 0,2 dans cette matrice.

2. À compter d'une certaine date, la société relève chaque jour à midi l'état de ses automates.
On note ainsi pour tout entier naturel n :

- f_n la probabilité qu'un automate soit fonctionnelle n-ième jour ;
- s_n la probabilité qu'un automate soit en sursis le n-ième jour ;
- d_n la probabilité qu'un automate soit défaillant le n-ième jour.

On note alors $P_n = \begin{pmatrix} f_n & s_n & d_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste le n-ième jour.
Enfin, la société observe qu'au début de l'expérience tous ses automates sont fonctionnels : on a donc $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Calculer P_1.

b. Montrer que, le 3ème jour, l'état probabiliste est $\begin{pmatrix} 0{,}729 & 0{,}217 & 0{,}054 \end{pmatrix}$.

c. Vérifier que ce graphe possède un unique état stable $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Quelle est la signification de ce résultat pour la situation étudiée ?

3. **a.** Justifier que pour tout entier naturel n, $s_{n+1} = 0{,}1\, f_n + 0{,}8\, s_n$.

b. On vérifierait de même que pour tout entier naturel n,

$$d_{n+1} = 0{,}2\, s_n + d_n \quad \text{et} \quad f_{n+1} = 0{,}9\, f_n .$$

Compléter l'algorithme ci-dessous de sorte qu'il affiche le nombre de jours au bout duquel 30 % des automates ne fonctionnent plus.

```
D ← 0
S ← …
F ← 1
N ← 0
Tant que …
        D ← 0,2 × S + D
        S ← 0,1 × F + 0,8 × S
        F ← 0,9 × F
        N ← …
Fin Tant que
Afficher …
```

c. Au bout de combien de jours la proportion d'automates défaillants devient-elle supérieure à 30 % ?

d. Dans le codage de la boucle « Tant que », l'ordre d'affectation des variables D, S et F est-il important ? Justifier.

124 Extrait de la session « Antilles – Guyane », 19 juin 2018

Les parties A et B sont indépendantes.

Franck joue en ligne sur internet.

Partie A

Après plusieurs semaines, des statistiques données par le logiciel lui permettent de dire que :

- quand il gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est égale à 0,65 ;
- quand il perd une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est égale à 0,42.

On note G l'état : « Franck gagne la partie » et P l'état : « Franck perd la partie ».

Sur une période donnée, on note, pour tout entier naturel n non nul :

- g_n la probabilité que Franck gagne la n-ième partie ;
- p_n la probabilité que Franck perde la n-ième partie.

Dans cette période, Franck a gagné la première partie.

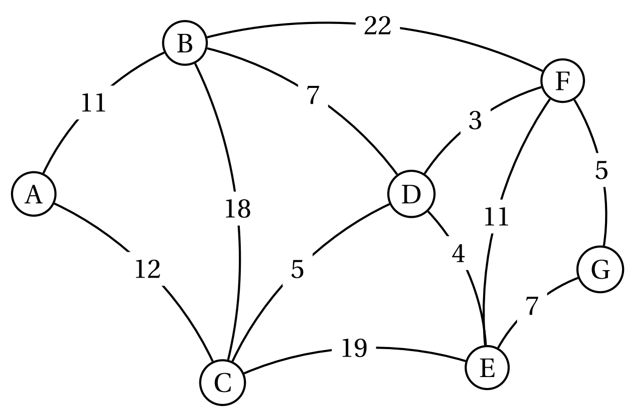
1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets notés G et P.
2. **a.** Écrire la matrice de transition M dans l'ordre G - P.

   b. Calculer la probabilité que Franck gagne la troisième partie.
3. Déterminer l'état stable du système et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice,

Partie B

Dans ce jeu vidéo, Franck circule dans des catacombes infestées de monstres qu'il doit combattre.

On a représenté ci-contre le graphe modélisant ces catacombes.
Les sommets représentent les salles et les arêtes représentent les couloirs.
Les étiquettes du graphe correspondent au nombre de monstres présents dans chaque couloir.



1. **a.** Justifier qu'il est possible, au départ d'une salle quelconque, d'y revenir après avoir parcouru tous les couloirs une et une seule fois.

   b. Donner un tel chemin.
2. Franck débute le jeu dans la salle A et doit atteindre l'adversaire final en salle G.
   Existe-t-il un chemin permettant de se rendre de la salle A à la salle G en passant une et une seule fois par tous les couloirs ?
3. Une fois arrivé en salle G, Franck souhaite revenir en salle A en affrontant le moins de monstres possible afin de recommencer une nouvelle partie.
   Déterminer ce trajet minimal et préciser le nombre de monstres affrontés.

125 Extrait de la session « Asie », 21 juin 2018 (4 points)

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour la nouvelle année, Lisa prend la bonne résolution d'aller au travail tous les matins à vélo. Le premier jour, très motivée, Lisa se rend au travail à vélo. Par la suite, elle se rend toujours au travail à vélo ou en voiture.

Elle se rend compte que :

- si elle a pris son vélo un jour, cela renforce sa motivation et elle reprend le vélo le lendemain avec une probabilité de 0,7 ;
- si elle a pris sa voiture un jour, la probabilité qu'elle reprenne la voiture le lendemain est de 0,5.

Cette situation peut être modélisée par un graphe probabiliste de sommets A et B où :

- A est l'évènement « Lisa prend le vélo » ;
- B est l'évènement « Lisa prend la voiture ».

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- a_n la probabilité que Lisa aille au travail à vélo le jour n ;
- b_n la probabilité que Lisa aille au travail en voiture le jour n.

1. **a.** Traduire les données par un graphe probabiliste.

b. En déduire la matrice de transition M.

2. **a.** Donner les valeurs de a_1 et b_1 correspondant à l'état initial.

b. Calculer la probabilité arrondie au centième que Lisa prenne le vélo le $8^{\text{ème}}$ jour.

3. Déterminer l'état stable du graphe puis interpréter le résultat obtenu.

4. **a.** Montrer que, pour tout nombre entier naturel n non nul, on a : $a_{n+1} = 0{,}7\,a_n + 0{,}5\,b_n$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $a_{n+1} = 0{,}2\,a_n + 0{,}5$.

5. **a.** Recopier et compléter l'algorithme suivant permettant de déterminer le plus petit entier n tel que $a_n <$ 0,626.

```
N ← 1
A ← 1
Tant que ... faire
    A ← ...
    N ← ...
Fin Tant que
```

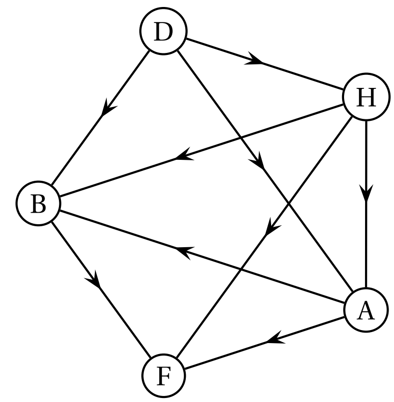
b. Quelle est la valeur de N après exécution de l'algorithme ?

Interpréter ce résultat.

126 Extrait de la session « Métropole – La Réunion », 22 juin 2018

Partie A

Un parcours sportif est composé d'un banc pour abdominaux, de haies et d'anneaux. Le graphe orienté ci-contre indique les différents parcours conseillés partant de D et terminant à F.



Les sommets sont : D (départ), B (banc pour abdominaux), H (haies), A (anneaux) et F (fin du parcours).

Les arêtes représentent les différents sentiers reliant les sommets.

1. Quel est l'ordre du graphe ?
2. On note M la matrice d'adjacence de ce graphe où les sommets sont rangés dans l'ordre alphabétique.

   a. Déterminer M.

   b. On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Assia souhaite aller de D à F en faisant un parcours constitué de 3 arêtes.

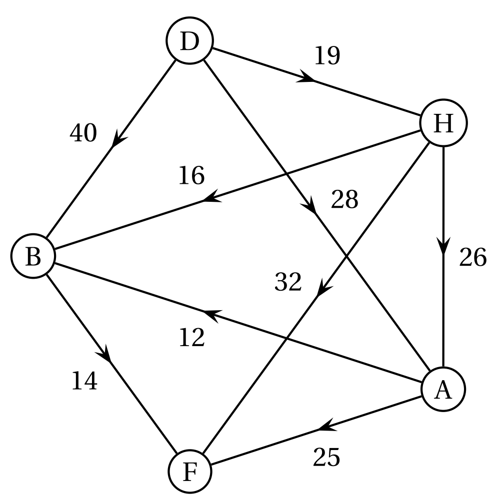
   Est-ce possible ?

   Si oui, combien de parcours différents pourra-t-elle emprunter ? Préciser ces trajets.

3. Assia a relevé ses temps de course en minute entre les différents sommets. Ces durées sont portées sur le graphe ci-dessous.

   Lors d'un entraînement, Assia souhaite courir le moins longtemps possible en allant de D à F.

   Déterminer le trajet pour lequel le temps de course est minimal et préciser la durée de sa course.



Partie B

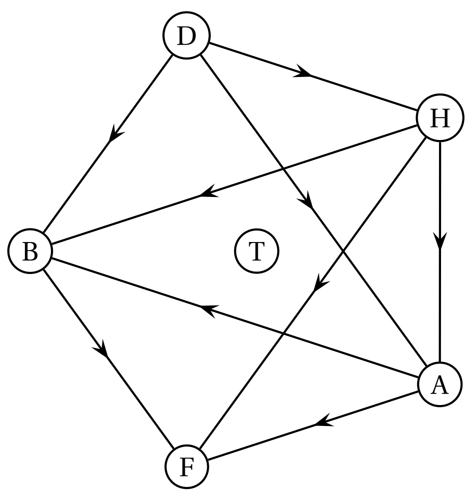
Le responsable souhaite ajouter une barre de traction notée T. De nouveaux sentiers sont construits et de nouveaux parcours sont possibles.

La matrice d'adjacence N associée au graphe représentant les nouveaux parcours, dans lequel les sommets sont classés en ordre alphabétique, est :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Compléter l'annexe 1 à rendre avec la copie, en ajoutant les arêtes nécessaires au graphe orienté correspondant à la matrice N.

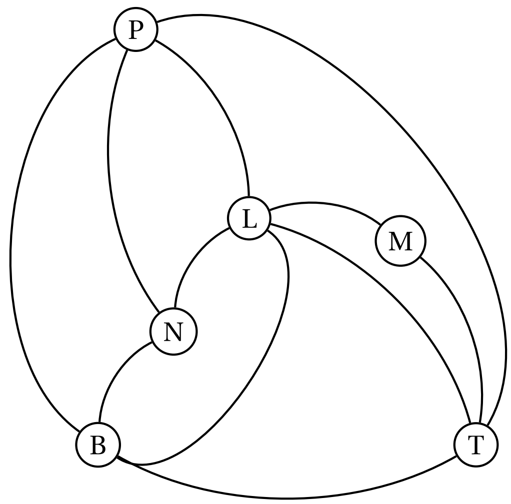
Annexe 1



127 Extrait de la session « Polynésie », 22 juin 2018 (4 points)

Un journaliste britannique d'une revue consacrée à l'automobile doit tester les autoroutes françaises.
Pour remplir sa mission, il décide de louer une voiture et de circuler entre six grandes villes françaises : Bordeaux (B), Lyon (L), Marseille (M), Nantes (N), Paris (P) et Toulouse(T).

Le réseau autoroutier reliant ces six villes est modélisé par le graphe ci-dessous sur lequel les sommets représentent les villes et les arêtes les liaisons autoroutières entre ces villes.



Partie A

1. **a.** Quel est l'ordre du graphe ?

   b. Le graphe est-il complet ? Justifier la réponse.

2. **a.** On admet que le graphe est connexe.
   Le journaliste envisage de parcourir chacune des liaisons modélisées sur le graphe une fois et une seule.
   Est-ce possible ? Justifier la réponse.

   b. Le journaliste va-t-il pouvoir louer sa voiture dans un aéroport parisien, parcourir chacune des liaisons une et une seule fois puis rendre la voiture dans le même aéroport ? Justifier la réponse.

3. On nomme G la matrice d'adjacence du graphe (les villes étant rangées dans l'ordre alphabétique).
   On donne :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G^3 = \begin{pmatrix} 10 & 13 & 5 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 12 & 8 & 11 & 13 & 12 \\ 5 & 8 & 2 & 5 & 5 & 7 \\ 10 & 11 & 5 & 6 & 10 & 7 \\ 11 & 13 & 5 & 10 & 10 & 12 \\ 12 & 12 & 7 & 7 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

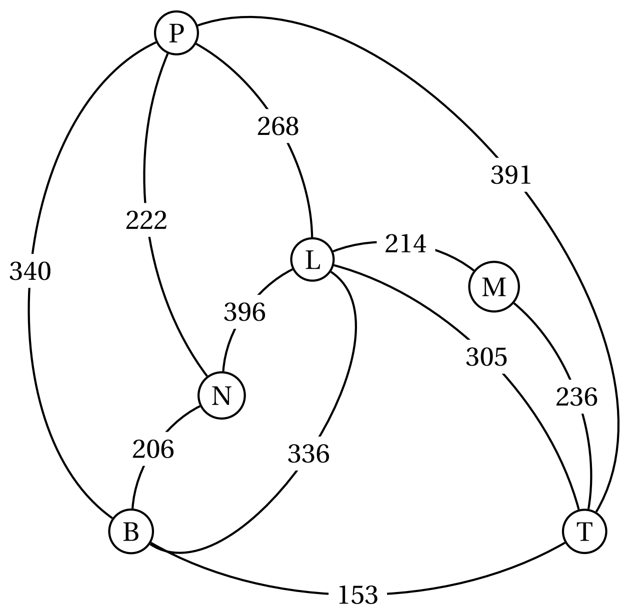
   a. Recopier et compléter la matrice d'adjacence.

   b. Alors qu'il se trouve à Paris, le rédacteur en chef demande au journaliste d'être à Marseille exactement trois jours plus tard pour assister à une course automobile. Le journaliste décide chaque jour de s'arrêter dans une ville différente.

   Déterminer le nombre de trajets possibles.

Partie B

On a indiqué sur le graphe ci-dessous le temps nécessaire en minutes pour parcourir chacune des liaisons autoroutières.



Le journaliste se trouve à Nantes et désire se rendre le plus rapidement possible à Marseille.
Déterminer un trajet qui minimise son temps de parcours.