ANNEXES

I- Equiprobabilité des configurations possibles de l'urne à un instant donné

Nous étudierons ici une urne avec des boules de trois couleurs différentes. Cela nous permettra dans la prochaine partie, de représenter graphiquement dans le plan l'évolution de l'urne. On considère donc que l'urne contient a boules rouges, b boules bleues et c boules vertes. A chaque tirage, la boule sera remise dans l'urne accompagnée de λ boules de la même couleur.
Construisons les premières branches de l'arbre des tirages.

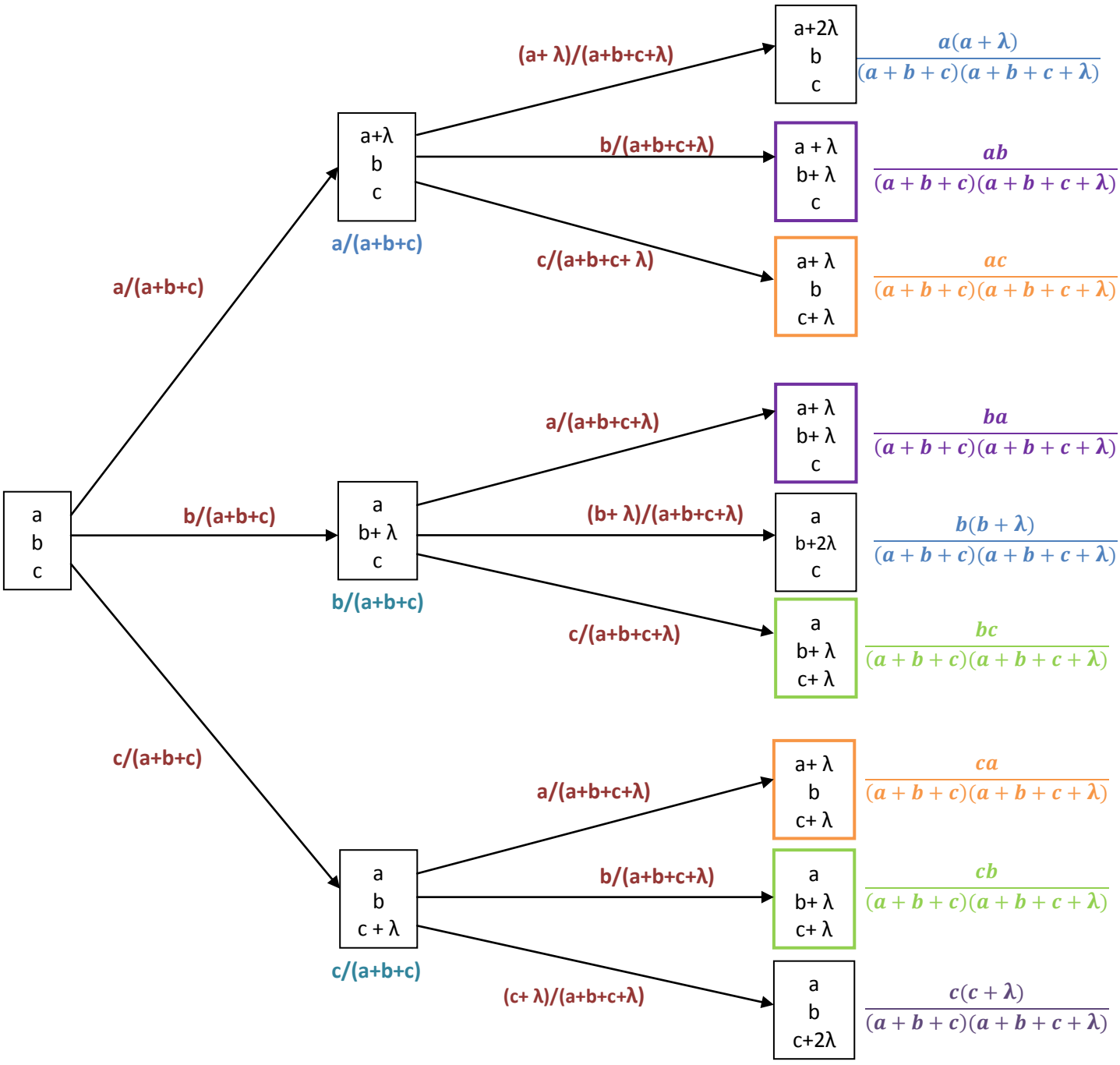


Figure 1 : Arbre des probabilités dans le cas où a=b=c et λ quelconque

La probabilité d'obtenir l'urne $\begin{matrix} a+2\lambda \\ b \\ c \end{matrix}$ avant le 3ème tirage est égale à :

$$\frac{a(a+\lambda)}{(a+b+c)(a+b+c+\lambda)} = \frac{a(a+\lambda)}{3a(3a+\lambda)} = \frac{(a+\lambda)}{3(3a+\lambda)} \quad \text{car } a=b=c$$

Cette probabilité est la même pour les urnes : $\begin{matrix} a \\ b+2\lambda \\ c \end{matrix}$ $\begin{matrix} a \\ b \\ c+2\lambda \end{matrix}$

Par ailleurs la probabilité d'obtenir l'urne $\begin{matrix} a+\lambda \\ b+\lambda \\ c \end{matrix}$ avant le 3ème tirage est égale à :

$$\frac{2ab}{(a+b+c)(a+b+c+\lambda)} = \frac{2a^2}{3a(3a+\lambda)} = \frac{2a}{3(3a+\lambda)} \quad \text{car } a=b=c$$

Cette probabilité est la même pour les urnes : $\begin{matrix} a+\lambda \\ b \\ c+\lambda \end{matrix}$ $\begin{matrix} a \\ b+\lambda \\ c+\lambda \end{matrix}$

Ainsi toutes ces urnes sont équiprobables si et seulement si

$$\frac{(a+\lambda)}{3(3a+\lambda)} = \frac{2a}{3(3a+\lambda)} \quad c'est-à-dire \quad a+\lambda = 2a \quad c'est-à-dire \quad \lambda = a$$

Montrons que si a=b=c=λ , alors les compositions possibles de l'urne à un instant donné n sont équiprobables :

On procède par récurrence :

- On a vu que toutes les compositions possibles de l'urne étaient équiprobables pour n=2.
- On suppose que la probabilité de chaque composition possible de l'urne avant le (n+1)ième tirage est :

$$\frac{a*2a*3a*\dots*na}{3a*4a*\dots*(n+2)a} = \frac{1*2*3*\dots*n}{3*4*\dots*(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

- Par la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements (H_n= (l, m, o)) avec l, m, o ϵ {1,…, λ(n+1)} tels que l+m+o= λ(n+3), on a : pour tout (i, j, k) ϵ {1,…, λ(n+1)}^{3} ,

$$P(H_{n+1}=(i,j,k)) = \sum_{(l,m,o)\epsilon\{1,\dots,\lambda(n+1)\}3 \text{ tel que } l+m+o=\lambda(n+3)} P(H_{n+1}=(i,j,k) \mid H_n=(l,m,o))\ P(H_n=(l,m,o))$$

Dans cette somme, seuls trois termes sont non nuls, donc :

$$P\left(H_{n+1}=(i,j,k)\right)=\frac{2}{(n+1)(n+2)}\left(\begin{array}{l}P(H_{n+1}=(i,j,k)|\,H_n=(i-\lambda,j,k)))\\+P(H_{n+1}=(i,j,k)|\,H_n=(i,j-\lambda,k))\\+P(H_{n+1}=(i,j,k)\mid H_n=(i,j,k-\lambda))\end{array}\right)$$

$$=\frac{2}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{i-\lambda}{\lambda(n+3)}+\frac{j-\lambda}{\lambda(n+3)}+\frac{k-\lambda}{\lambda(n+3)}\right)$$

$$=\frac{2}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{\lambda(n+1)}{\lambda(n+3)}\right)\qquad \text{car}\quad (i-\lambda+j+k)=\lambda(n+3)$$

$$=\frac{2}{(n+2)(n+3)}$$

Or

$$\frac{2}{(n+2)(n+3)}=\frac{2}{\left((n+1)+1\right)\left((n+1)+2\right)}$$

Donc avant le (n+1)ième tirage les configurations possibles de l'urne sont **équiprobables**.

Par conséquent, dans le cas où a=b=c et λ quelconque, les configurations possibles de l'urne à un instant donné sont équiprobables si et seulement si **a=b=c=λ** c'est-à-dire si le nombre de boules de chaque couleur initialement présentes dans l'urne est égal au nombre de boules rajoutées à chaque tirage.

II- <u>Probabilité d'une suite de tirages</u>

On considère une urne contenant initialement a rouges, b bleues, c vertes. On notera t=a+b+c le nombre total de boules avant le premier tirage.

Supposons que nous ayons effectué p tirages.
Soit $x_1, x_2, \ldots, x_p$ la couleur des boules tirées successivement.
Pour connaître le contenu de l'urne avant le (p+1)ième tirage, il faut savoir combien de fois ont été tirées les boules de chaque couleur. Il faut donc connaître les nombres

$a^p, b^p, c^p =$ nombre de tirages de boules rouges, bleues et vertes dans les p premiers tirages

Avant le (p+1)ième tirage, l'urne contient donc : $a+\lambda a^p$ boules rouges, $b+\lambda b^p$ boules bleues, $c+\lambda c^p$ boules vertes et $t+\lambda p$ boules en tout.

Donc la probabilité de tirer au (p+1)ième tirage une boule

rouge est $\frac{a+\lambda a^p}{t+\lambda p}$ bleue $\frac{b+\lambda b^p}{t+\lambda p}$ et verte $\frac{c+\lambda c^p}{t+\lambda p}$

Nous appellerons m^p le point de $\mathbb{R}^3$ ayant ces trois coordonnées, et n^p le point de $\mathbb{N}^3$ de coordonnées a^p, b^p et c^p.
Remarquons que si l'on connait les m^r pour $1 \le r \le p$ alors on peut calculer les n^r et x_r pour $1 \le r \le p$.

On considère maintenant les tirages successifs comme aléatoires. On note X_p la couleur aléatoire de la boule tirée au p[ième] tirage, on a

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_p = x_p) = m^0_{x_0}\ m^1_{x_1} \dots .\ m^{p-1}_{x_{p-1}}$$

avec $m^i_{x_i}$ la probabilité de tirer au $(i+1)^{ième}$ tirage une boule de couleur x_i.

Or ce produit peut se réécrire en commutant les facteurs

$$\frac{a \dots (a + \lambda a^{p-1})\ b \dots\ (b + \lambda b^{p-1})\ c \dots (c + \lambda c^{p-1})}{t\,(t+\lambda) \dots (t + \lambda(p-1))}$$

Il en résulte que la probabilité d'une suite de tirages ne dépend que du nombre de tirages de chaque couleur et non de leur ordre.

III- Convergence des trajectoires et densité des « points - limites »

Introduisons les variables aléatoires :

$$A^p = \text{card}\,\{\, i \text{ tel que } 1 \le i \le p, \quad X_i \text{ est rouge}\}$$

$$B^p = \text{card}\,\{\, i \text{ tel que } 1 \le i \le p, \quad X_i \text{ est bleue}\}$$

$$C^p = \text{card}\,\{\, i \text{ tel que } 1 \le i \le p, \quad X_i \text{ est verte}\}$$

indiquant le nombre de fois où chaque couleur est sortie avant le (p+1)[ième] tirage.

On a ainsi :

$$P(A^p = a^p, B^p = b^p, C^p = c^p) = \frac{p!}{a^p!\, b^p!\, c^p!} . P(X_r = x_r, 1 \le r \le p)$$

$$= \frac{p!}{a^p!\, b^p!\, c^p!} . \frac{a \dots (a + \lambda a^{p-1})\ b \dots\ (b + \lambda b^{p-1})\ c \dots (c + \lambda c^{p-1})}{t\,(t+\lambda) \dots (t + \lambda(p-1))}$$

Ceci donne la distribution du point N^p de $\mathbb{N}^3$ coordonnées (A^p, B^p, C^p) et aussi du point M^p de coordonnées

$$M^p_{rouge} = \frac{a + \lambda A^p}{t + \lambda p}, \qquad M^p_{bleue} = \frac{b + \lambda B^p}{t + \lambda p}, \qquad M^p_{verte} = \frac{c + \lambda C^p}{t + \lambda p}$$

qui représente la proportion de boules de chaque couleur avant le (p+1)[ème] tirage.

Remarquons que la connaissance de $M^1, \dots, M^p$ n'apporte pas plus d'informations sur M^{p+1} que la seule connaissance de M^p. En effet, connaissant $M^1 = m^1, \dots, M^p = m^p$, M^{p+1} est déterminé par un tirage dans une urne dont la composition est $(a^p + \lambda p)$, $(b^p + \lambda p)$, $(c^p + \lambda p)$ et cette composition dépend uniquement de m^p.

Donc $\{M^p\}$ est une **chaîne de Markov.**

Intéressons nous à la suite $\{N^p\}$
Conditionnons par $N^p=n^p$ (ou $M^p=m^p$).
Le vecteur $\overrightarrow{n^pN^{p+1}}$ prend les valeurs

$$\begin{cases} (1,0,0) \text{ avec probabilité } \dfrac{a+\lambda a^p}{t+\lambda p} \\ (0,1,0) \text{ avec probabilité } \dfrac{b+\lambda b^p}{t+\lambda p} \\ (0,0,1) \text{ avec probabilité } \dfrac{c+\lambda c^p}{t+\lambda p} \end{cases}$$

Donc son espérance conditionnelle est

$$\left(\frac{a+\lambda a^p}{t+\lambda p}, \frac{b+\lambda b^p}{t+\lambda p}, \frac{c+\lambda c^p}{t+\lambda p}\right)$$

Et l'on retrouve les trois coordonnées du point m^p
Par ailleurs,

$$(t+\lambda p)\overrightarrow{Om^p} = \overrightarrow{On^0} + \lambda\overrightarrow{On^p}$$
$$\text{et } \big(t+\lambda(p+1)\big)\overrightarrow{OM^{p+1}} = \overrightarrow{On^0} + \lambda\overrightarrow{ON^{p+1}}$$

Ensuite, en retranchant la 1ère ligne de la seconde,

$$(t+\lambda p)\overrightarrow{m^pM^{p+1}} + \lambda\overrightarrow{OM^{p+1}} = \lambda\overrightarrow{n^pN^{p+1}}$$

D'où, en prenant les espérances conditionnelles,

$$(t+\lambda p)\,E\left(\overrightarrow{m^pM^{p+1}}\right) = \lambda\overrightarrow{Om^p} - \lambda E(\overrightarrow{OM^{p+1}}) \qquad \text{car } E(\overrightarrow{n^pN^{p+1}}) = \overrightarrow{Om^p}$$
$$= -\lambda\, E\left(\overrightarrow{m^pM^{p+1}}\right)$$
$$\text{ou } \big(t+\lambda(p+1)\big)\,E\left(\overrightarrow{m^pM^{p+1}}\right) = \vec{0} \text{ et } E\left(\overrightarrow{m^pM^{p+1}}\right) = \vec{0}, \qquad \text{car } t+\lambda(p+1) > 0$$
$$\text{ou encore } E(M^{p+1} \mid M^p = m^p) = m^p$$

On dit que la suite $\{M^p\}$ est une martingale.
Il en résulte que la suite $\{M^p\}$ converge presque surement, quand n tend vers l'infini, vers un point limite M. Mais celui-ci est aléatoire.

Rappelons que les points M^p représentent les proportions des différentes couleurs des boules après le $p^{ième}$ tirage, donc le point M représente aussi une telle proportion, il est donc réparti sur le domaine D de $\mathbb{R}^3$ défini par $\forall j \in [\![1;3]\!]$ $\alpha_j \geq 0$ et $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$.

On démontre qu'il a sur ce domaine une densité proportionnelle à la densité de Dirichlet : $\alpha_1^{\frac{a}{\lambda}-1}.\alpha_2^{\frac{b}{\lambda}-1}.\alpha_3^{\frac{c}{\lambda}-1}$.

Notons que :

- Si $a=b=c=\lambda$, M est réparti uniformément sur D.
- Si $\lambda < \min(a,b,c)$ la densité est maximum au point de coordonnées $\frac{a}{\lambda},\frac{b}{\lambda},\frac{c}{\lambda}$ qui représente la composition initiale de l'urne.
- Si $\lambda > \max(a,b,c)$, la densité présente 3 maximums relatifs aux sommets de D.

IV- Animations

Pour ouvrir les animations Scilab, il est nécessaire de télécharger Scilab qui est disponible gratuitement sur internet.
L'animation Flash est visible seulement à partir d'un lecteur Flash.

V- Feuilles de TD/TP

Voici les feuilles de travaux dirigés et pratiques destinées à une classe de seconde.

Première feuille de TD donnée aux élèves :

Problème :
3 savonnettes identiques mais de senteur différente (anis, vanille, jasmin) sont sur le marché. A la suite d'une campagne publicitaire, il y a 1 acheteur pour chaque senteur. Ensuite tout nouvel acheteur se fie au conseil du premier acheteur rencontré.
Quel produit va être le plus vendu ?

1ère partie : Comment modéliser le problème ?

2ème partie : étude de l'urne après 3 tirages :
1°) Combien y a-t-il de boules dans l'urne avant le quatrième tirage ?
2°) Quelles sont les 10 compositions possibles de l'urne ?
3°) A-t-on les mêmes chances d'obtenir chacune de ces compositions ?

3ème partie : Même étude avec une urne de départ contenant 2 boules de chaque couleur.

Première feuille de TP donnée aux élèves :

Objectif : simuler l'expérience qui consiste à tirer 3 boules dans l'urne.
Une fois l'expérience simulée, relever la configuration finale de l'urne.
Puis effectuer cette expérience 5 fois.

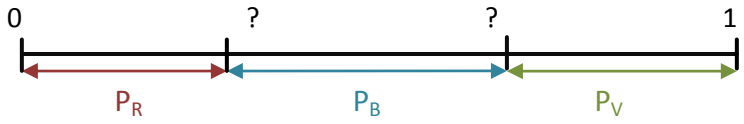
Aide :

Nombres aléatoires	état de l'urne	boules rouges	boules bleues	boules vertes
	à l'état initial			
	après le1er tirage			
	après le 2ème tirage			
	après le 3ème tirage			

Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge P_R? Et une boule bleue P_B? Et une boule verte P_V?
(La somme de ces probabilités est égale à 1)

Pour simuler le tirage d'une boule au hasard, on peut générer un nombre aléatoire et trouver les 3 intervalles répartis sur [0,1] telles que :

- si le nombre aléatoire appartient au 1er intervalle, on rajoute une boule rouge.
- si le nombre aléatoire appartient au 2ème intervalle, on rajoute une boule bleue.
- si le nombre aléatoire appartient au 3ème intervalle, on rajoute une boule verte.



Fonctions utiles :

- **ALEA()** : cette fonction génère un « nombre aléatoire » entre 0 et 1.
- **SI(test logique ; valeur si le test est vrai ; valeur si le test est faux)** : renvoie une valeur si la condition (test logique) est vraie et une autre valeur si la condition est fausse.
- **ET(test ;test)** : vérifie que tous les arguments sont vrais.

Deuxième feuille de TD/TP donnée aux élèves

Etude de l'évolution de la composition de l'urne à long terme.

Objectif : observer l'évolution de la proportion des boules rouge dans l'urne après de nombreux tirages.

Sur calculatrice :

1°) Ecrire un algorithme sur calculatrice permettant de simuler l'expérience autant de fois que l'on veut avec la composition initiale de l'urne au choix.
2°) Observer la suite de proportions de boules rouge obtenues. Que remarquez-vous ?
Est-ce toujours le cas ?
3°) Que se passe t-il lorsque la composition initiale de l'urne change ?

Sur tableur :

1°) Simuler sur tableur l'expérience qui consiste à tirer un grand nombre de fois une boule dans l'urne.
2°) Observer la suite de proportion de boules rouge obtenues. Que remarquez-vous ?
Est-ce toujours le cas ?
3°) Comment se répartissent ces valeurs « limites » ?
4°) Que se passe t-il lorsque la composition initiale de l'urne change ?

Sur Scilab :

Préliminaires :

- Dans la console, taper la commande :
  exec('C:\Users\pb\Documents\M1-Enseignement des maths\TER\Film_eleves.sce', -1)
  (il faut écrire cette commande à chaque fois que l'on veut recommencer l'expérience.)

1°) Simuler 5 fois l'expérience qui consiste à tirer 10 fois une boule dans l'urne. Que pouvez-vous dire de la composition de l'urne dans chacune des expériences ?
2°) Refaire 5 fois l'expérience mais avec des séries de 150 tirages. Que peut-on dire des trajectoires du point ? Que peut-on en déduire pour la composition de l'urne ?

A présent taper dans la console :
exec('C:\Users\pb\Documents\M1-Enseignement des maths\TER\Film_eleves_points_limites.sce', -1)

3°) Simuler 300 séries de 200 tirages. Comment se répartissent ces valeurs « limites » ?
4°) Que se passe t-il lorsque la composition initiale de l'urne change ?