

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Antilles-Guyane juin 1993 ∞

EXERCICE 1

5 points

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , l'unité est le centimètre.

Soit ABC un triangle direct dont le point O est le centre de son cercle circonscrit. On désigne par M le milieu de [BC], N celui de [CA] et P celui de [AB].

Les affixes respectives des points M, N et P sont notées m, n et p .

1. Dans cette question, m vaut $-1 - 3i$ et n vaut 2 .
Construire les triangles MNP et ABC.
2. On considère la transformation f du plan dans lui-même qui à chaque point M d'affixe $z = x + iy$ associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ telle que :

$$z' = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}(-z + m + n + p).$$

Quelle est la nature de f ? Donner ses éléments caractéristiques.

3. a, b et c désignent les affixes respectives des points A, B et C.
 - a. Montrer que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PA}$. En déduire que $a = n + p - m$.
 - b. Exprimer, d'une manière analogue, b et c en fonction de m, n et p .
4. On pose $f(A) = A', f(B) = B'$ et $f(C) = C'$.
On désigne par a', b' et c' les affixes respectives des points A', B' et C' .
 - a. Démontrer que :
$$a' = (1 + i)m,$$
$$b' = (1 + i)n,$$
$$c' = (1 + i)p.$$
 - b. En déduire que $\overrightarrow{MA'}$ et \overrightarrow{OM} sont orthogonaux et que A' appartient à la droite (BC).
 - c. Montrer de même que B' appartient à la droite (AC) et que C' appartient à la droite (AB).
5. Montrer que les triangles MNP et $A'B'C'$ sont directement semblables, (On précisera le centre de la similitude directe transformant le triangle MNP en le triangle $A'B'C'$.)
6. Compléter par les points A', B' et C' la figure réalisée au 1.

EXERCICE 2

4 points

Un tournoi oppose deux équipes A et B qui jouent trois parties successives d'un même jeu. Le vainqueur du tournoi est l'équipe qui a gagné le plus de parties.

Chaque partie est notée respectivement A, B ou N suivant que l'équipe A gagne, B gagne ou la partie est nulle.

À chaque partie, l'équipe A a une probabilité de 0,5 de gagner, l'équipe B a une probabilité de 0,4 de gagner et la probabilité pour que la partie soit nulle vaut 0,1.

1. Dresser la liste des tournois sans vainqueur : justifier qu'ils sont au nombre de 7.
Montrer que la probabilité pour que le tournoi soit sans vainqueur est égale à $0,121$.
2.
 - a. Calculer la probabilité pour que l'équipe A gagne exactement une partie du tournoi et remporte le tournoi.
 - b. Montrer que la probabilité pour que l'équipe A soit vainqueur du tournoi est $0,515$.
3. Sachant que l'équipe B est vainqueur du tournoi, calculer la probabilité que l'équipe B ait gagné exactement deux parties.

PROBLÈME**11 points****Partie A**

1. Résoudre dans l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels l'équation différentielle :

$$(1) \quad y'' + 2y' + 2y = 0.$$

2. On considère sur l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} , l'équation différentielle :

$$(2) \quad y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \left(-x + \frac{1}{2} \right).$$

- a. Déterminer les réels a et b tels que la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = e^{-x}(ax + b)$$

soit une solution de l'équation (2).

- b. h désignant une solution quelconque de l'équation (1), montrer que la fonction f telle que : $f(x) = g(x) + h(x)$ est solution de l'équation (2).
- c. Déterminer parmi les fonctions f définies au 2. b. celle qui vérifie :
 $f(0) = 1$ et $f'(0) = -\frac{3}{2}$.

Partie B

Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[-1 ; 5]$ par :

$$\varphi(x) = \frac{e^{-x}}{2}(\cos x + \sin x - 2x + 1).$$

1. Montrer que, φ' désignant la fonction dérivée de φ , on a :

$$\varphi'(x) = \frac{e^{-x}}{2}(2x - 3 - 2\sin x).$$

2. On pose, pour tout x appartenant à $[-1 ; 5]$, $y(x) = 2x - 3 - 2\sin x$.
 - a. Montrer que y est croissante sur $[-1 ; 5]$.
 - b. Montrer qu'il existe un unique réel a compris entre 2,2 et 2,3 tel que :
 $y(a) = 0$.
 - c. Dresser le tableau de variation de φ .
3. Construire la courbe représentative de la fonction φ en prenant $\varphi(2,3)$ comme valeur approchée de $\varphi(a)$.

Partie C

On rappelle que φ vérifie l'équation (2) de la partie A :

$$\varphi''(x) + 2\varphi'(x) + 2\varphi(x) = \frac{e^{-x}}{2} \left(-x + \frac{1}{2} \right).$$

1. Calculer, en intégrant par parties :

$$\int_0^1 e^{-x} \left(-x + \frac{1}{2} \right) dx.$$

2. Sachant que :

$$2\varphi(x) = e^{-x} \left(-x + \frac{1}{2} \right) - \varphi''(x) - 2\varphi'(x),$$

montrer que :

$$\int_0^1 \varphi(x) dx = \frac{1}{2} \left(\left[e^{-x} \left(-x + \frac{1}{2} \right) \right]_0^1 - [\varphi'(x)]_0^1 - 2[\varphi(x)]_0^1 \right).$$

Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près de $\int_0^1 \varphi(x) dx$.