Baccalauréat C Antilles-Guyane juin 1987

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Soit f_1 la fonction numérique de la variable x, définie sur R^- par :

$$f_1(x) = x - \sqrt[3]{3x}$$

et soit f_2 la fonction numérique de la variable x, définie sur R^+ par :

$$f_2(x) = x + \sqrt[3]{3x}.$$

1. Étudier les fonctions f_1 et f_2.
   Tracer leurs courbes représentatives $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
   On précisera en particulier les tangentes à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ au point O.
2. Soit h la fonction numérique de la variable x, définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$h(x) = x + \sqrt[3]{3|x|}.$$

   Montrer que sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est la réunion de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
   La droite d'équation $y = x + 1$ coupe la courbe $\mathcal{C}$ en deux points A et B. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par le segment [AB] et les arcs $\overset{\frown}{\text{OA}}$ et $\overset{\frown}{\text{OB}}$ de la courbe C.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Pour tout nombre complexe z, on pose :

$$f(z) = z^3 - (16 - \text{i})z^2 + (89 - 16\text{i})z + 89\text{i}.$$

1. Montrer que l'équation $f(z) = 0$ possède une racine imaginaire pure, a, que l'on déterminera.
2. Démontrer qu(il existe deux nombres réels p et q tels que :

   $$f(z) = (z - a)\left(z^2 + pz + q\right).$$

   Résoudre alors dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(z) = 0$.
3. On note P le plan complexe muni d'un repère orthonormé et a, z_1 (de partie imaginaire positive) et z_2 les solutions de l'équation $f(z) = 0$.
   Soient A, B et C les points d'affixes respectives a, z_1 et z_2. Quelle est la nature du triangle ABC ?
4. Déterminer et représenter l'ensemble E des points M du plan P tels que :

   $$M\text{A}^2 + M\text{B}^2 - M\text{C}^2 = 20.$$

   Montrer que E contient le point A et le point C.

PROBLÈME **12 POINTS**

On se propose dans ce problème d'étudier l'ensemble, noté $\sum$, des points de l'espace équidistants de deux droites D et D$'$ non coplanaires et orthogonales.
Les parties A, B, C pourront être traitées de façon indépendante.
A.

1. **a.** Donner la condition nécessaire et suffisante pour qu'une symétrie orthogonale ,s, par rapport à un plan (réflexion) laisse invariante une droite donnée.
   En déduire qu'il existe deux symétries orthogonales par rapport à un plan seulement qui laissent simultanément invariant les droites D et D$'$:
   l'une par rapport à un plan passant par D et orthogonal à D$'$ en B,
   l'autre par rapport à un plan passant par D$'$ et orthogonal à D en A.

   b. Montrer que $\sum$ admet, en particulier, deux plans de symétries et un axe de symétrie (AB).
2. Montrer que l'intersection de $\sum$ avec l'un quelconque de ses plans de symétrie est une parabole dont on précisera le foyer et la directrice.

B) Dans cette partie, ainsi que dans la partie C, l'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O} ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

La droite D passe par le point A de coordonnées (0 ; 0 ; 1) et admet comme vecteur directeur $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$.
La droite D$'$ passe par le point B de coordonnées (0 ; 0 ; -1) et admet comme vecteur directeur $\vec{v}$ tel que $\vec{v} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$.

1. **a.** Vérifier que les droites D et D$'$ sont orthogonales et non coplanaires.
   Montrer que le point O appartient à $\sum$.

   b. Montrer qu'une représentation paramétrique de D est :
   $$\left\{\begin{array}{l c l}x & = & t\\ y & = & t \qquad t \in \mathbb{R}.\\ z & = & 1\end{array}\right.$$
   Soit M un point de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ et P un point de D, exprimer MP^2. En considérant MP^2 comme une fonction de t, en déduire la distance de M à D.

   c. Calculer de même la distance du point M à la droite D$'$.

   d. En déduire que M appartient à $\sum$ si et seulement si on a : $xy + 2z = 0$.
2. Déduire de cette relation :

   a. que les intersections de $\sum$ avec des plans orthogonaux à la droite (AB) sont en général des hyperboles.
   Préciser les cas d'exception.

   b. la nature des intersections de $\sum$ avec des plans orthogonaux à l'axe $\left(\text{O} ;\ \vec{\imath}\right)$ ou à l'axe $\left(\text{O} ;\ \vec{\jmath}\right)$.

C. Soit $M(t)$ le point de $\sum$ admettant comme abscisse $x(t) = 4\cos t$ et pour ordonnée $y(t) = \sin 2t$ dans le repère $\left(\text{O} ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
Lorsque t varie dans $\mathbb{R}$, le point M décrit la courbe Γ incluse dans $\sum$.

1. Construire la courbe Γ_z projection orthogonale de Γ sur le plan d'équation $z = 0$.
   On prendra 2 cm comme unité.
2. On désigne par Γ_x la projection orthogonale de Γ sur le plan d'équation $x = 0$ et par la projection orthogonale de Γ_x sur le plan d'équation $y = 0$.
   Construire ces courbes après avoir donné une représentation paramétrique de chacune d'elles.
   Un étude préalable de leurs éventuels éléments de symétrie facilitera leur étude et leur construction.