Durée : 4 heures

Baccalauréat C Antilles-Guyane juin 1993

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$, l'unité est le centimètre.
Soit ABC un triangle direct dont le point O est le centre de son cercle circonscrit. On désigne par M le milieu de [BC], N celui de [CA] et P celui de [AB].
Les affixes respectives des points M, N et P sont notées m, n et p.

1. Dans cette question, m vaut $-1-3\text{i}$ et n vaut 2.
Construire les triangles MNP et ABC.

2. On considère la transformation f du plan dans lui-même qui à chaque point M d'affixe $z = x+\text{i}y$ associe le point M' d'affixe $z' = x' + \text{i}y'$ telle que :

$$z' = \frac{\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}(-z+m+n+p).$$

Quelle est la nature de f ? Donner ses éléments caractéristiques.

3. a, b et c désignent les affixes respectives des points A, B et C.

a. Montrer que $\overrightarrow{\text{MN}} = \overrightarrow{\text{PA}}$. En déduire que $a = n+p-m$.

b. Exprimer, d'une manière analogue, b et c en fonction de m, n et p.

4. On pose $f(\text{A}) = \text{A}'$, $f(\text{B}) = \text{B}'$ et $f(\text{C}) = \text{C}'$.
On désigne par a', b' et c' les affixes respectives des points A′, B′ et C′.

a. Démontrer que :
$a' = (1+\text{i})m$,
$b' = (1+\text{i})n$,
$c' = (1+\text{i})p$.

b. En déduire que $\overrightarrow{\text{MA}'}$ et $\overrightarrow{\text{OM}}$ sont orthogonaux et que A′ appartient à la droite (BC).

c. Montrer de même que B′ appartient à la droite (AC) et que C′ appartient à la droite (AB).

5. Montrer que les triangles MNP et A′B′C′ sont directement semblables, (On précisera le centre de la similitude directe transformant le triangle MNP en le triangle A′B′C′.)

6. Compléter par les points A′, B′ et C′ la figure réalisée au 1.

EXERCICE 2 **4 points**

Un tournoi oppose deux équipes A et B qui jouent trois parties successives d'un même jeu. Le vainqueur du tournoi est l'équipe qui a gagné le plus de parties.
Chaque partie est notée respectivement A, B ou N suivant que l'équipe A gagne, B gagne ou la partie est nulle.
À chaque partie, l'équipe A a une probabilité de $0,5$ de gagner, l'équipe B a une probabilité de $0,4$ de gagner et la probabilité pour que la partie soit nulle vaut $0,1$.

1. Dresser la liste des tournois sans vainqueur : justifier qu'ils sont au nombre de 7.
Montrer que la probabilité pour que le tournoi soit sans vainqueur est égale à $0,121$.

2. a. Calculer la probabilité pour que l'équipe A gagne exactement une partie du tournoi et remporte le tournoi.

b. Montrer que la probabilité pour que l'équipe A soit vainqueur du tournoi est $0,515$.

3. Sachant que l'équipe B est vainqueur du tournoi, calculer la probabilité que l'équipe B ait gagné exactement deux parties.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels l'équation différentielle :

$$(1) \qquad y'' + 2y' + 2y = 0.$$

2. On considère sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, l'équation différentielle :

$$(2) \qquad y'' + 2y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}\left(-x + \frac{1}{2}\right).$$

a. Déterminer les réels a et b tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{-x}(ax + b)$$

soit une solution de l'équation (2).

b. h désignant une solution quelconque de l'équation (1), montrer que la fonction f telle que : $f(x) = g(x) + h(x)$ est solution de l'équation (2).

c. Déterminer parmi les fonctions f définies au 2. b. celle qui vérifie :
$f(0) = 1$ et $f'(0) = -\dfrac{3}{2}$.

Partie B

Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[-1\,;\,5]$ par :

$$\varphi(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}(\cos x + \sin x - 2x + 1).$$

1. Montrer que, φ' désignant la fonction dérivée de φ, on a :

$$\varphi'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}(2x - 3 - 2\sin x).$$

2. On pose, pour tout x appartenant à $[-1\,;\,5]$, $y(x) = 2x - 3 - 2\sin x$.

a. Montrer que y est croissante sur $[-1\,;\,5]$.

b. Montrer qu'il existe un unique réel a compris entre $2,2$ et $2,3$ tel que : $y(a) = 0$.

c. Dresser le tableau de variation de φ.

3. Construire la courbe représentative de la fonction φ en prenant $\varphi(2,3)$ comme valeur approchée de $\varphi(a)$.

Partie C

On rappelle que φ vérifie l'équation (2) de la partie A :

$$\varphi''(x) + 2\varphi'(x) + 2\varphi(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\left(-x + \frac{1}{2}\right).$$

1. Calculer, en intégrant par parties :

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\left(-x+\frac{1}{2}\right)\,\mathrm{d}x.$$

2. Sachant que :

$$2\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(-x+\frac{1}{2}\right) - \varphi''(x) - 2\varphi'(x),$$

montrer que :

$$\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\left[\mathrm{e}^{-x}\left(-x+\frac{1}{2}\right)\right]_0^1 - \left[\varphi'(x)\right]_0^1 - 2\left[\varphi(x)\right]_0^1\right).$$

Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près de $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x$.