Baccalauréat ES Antilles–Guyane juin 2000

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

La documentaliste d'un lycée effectue une enquête auprès de 500 élèves entrant au CDI afin de connaître le nombre d'ouvrages consultés selon la fréquentation du CDI.

On obtient les résultats suivants :

- 18 % des élèves consultent un seul ouvrage par visite et, parmi ceux-ci, 90 % viennent au moins une fois par semaine ;
- 125 élèves viennent moins d'une fois par semaine et 16 % d'entre eux consultent entre deux et cinq ouvrages par visite ;
- 45 % des élèves viennent au moins une fois par semaine et consultent chaque fois plus de cinq ouvrages.

1. Reproduire et compléter le tableau des **effectifs** ci-dessous

Fréquentation / Nombre d'ouvrages consultés	au moins une fois par semaine	moins d'une fois par semaine	Totaux
un ouvrage			
de deux à cinq ouvrages			
plus de cinq ouvrages			
Totaux			500

2. On prend au hasard un élève fréquentant le CDI et on considère les évènements :
   A : « L'élève vient au moins une fois par semaine au CDI » ;
   B : « L'élève consulte de 2 à 5 ouvrages » ;
   C : « L'élève consulte au moins 2 ouvrages » ;
   D : « L'élève vient au moins une fois par semaine au CDI et consulte entre 2 et 5 ouvrages ».
   Calculer la probabilité des évènements A, B, C, D et $A \cup B$.
3. **a.** On considère un élève qui vient au moins une fois par semaine au CDI.
   Quelle est la probabilité pour qu'il consulte de deux à cinq ouvrages ?

   b. On considère un élève qui consulte de 2 à 5 ouvrages.
   Quelle est la probabilité qu'il vienne au moins une fois par semaine au CDI ?
   (N.B. : les résultats seront donnés à 10^{-3} près.)

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le graphique donné en annexe est celui de (Γ), courbe représentative d'une fonction f définie sur $[0 ; 4]$ et de ses tangentes aux points d'abscisses 1 et 1,5.

1. Lire graphiquement $f(1)$; $f'(1)$; $f(1,5)$.
2. Parmi les trois courbes données en annexe, laquelle est susceptible de représenter f', où f' est la fonction dérivée de f ?
   Justifier votre réponse à l'aide d'arguments graphiques.
3. On admet que $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x+1}$ où a et b sont deux réels fixés.
   Calculer $f(x)$ puis utiliser la question 1 pour déterminer a et b.

4. On pose

$$H(x) = -(2x+1)\mathrm{e}^{-x+1}$$

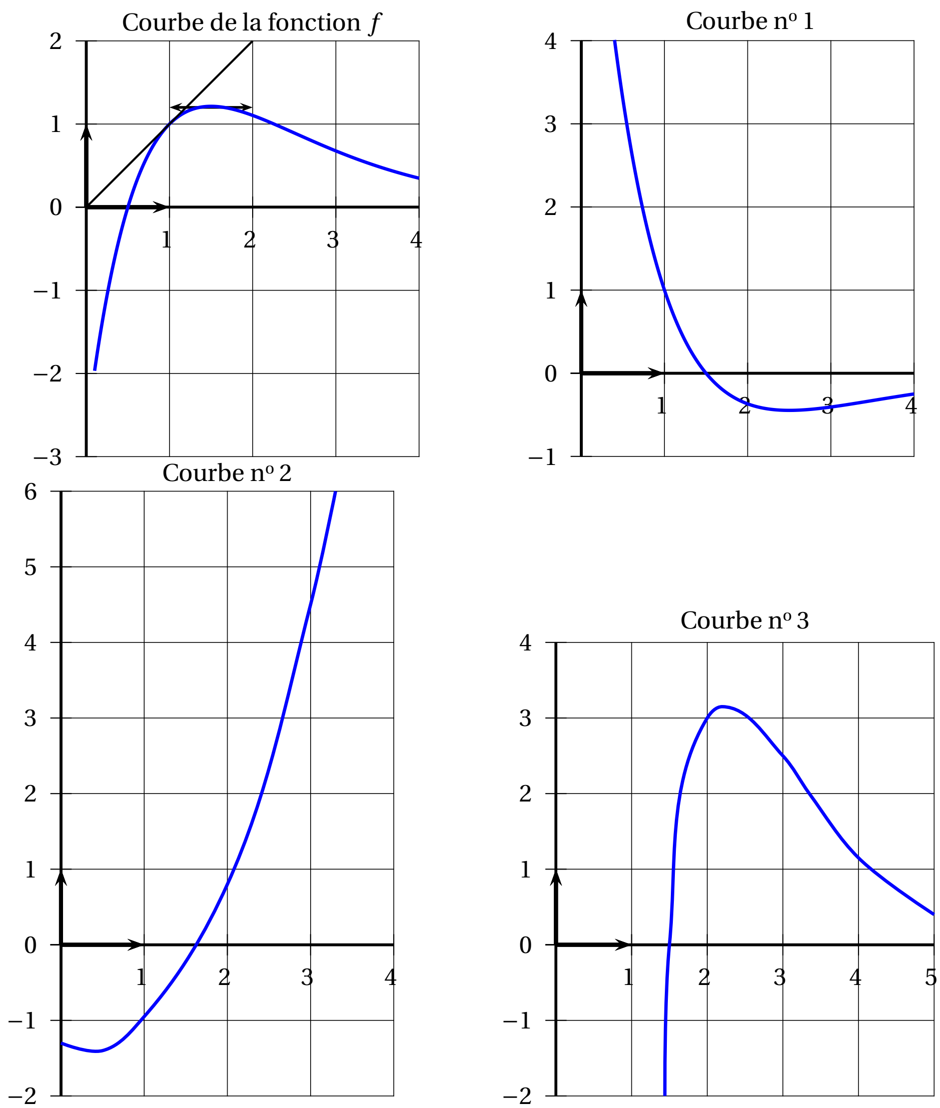
sur $\mathbb{R}$.

Vérifier que H est une primitive de h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{-x+1}.$$

En déduire, en unités d'aire, la valeur exacte de l'aire de la portion de plan limitée par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 4$.

Annexe



EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

1. Soit la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 80 + a\mathrm{e}^{bx}$.
   Déterminer les réels a et b pour que la courbe représentative de f, dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, passe par les points A$(0\,;53)$ et B$(3\,;60)$. Donner les valeurs exactes, puis une valeur arrondie à 10^{-1} près pour b.
2. Dans une entreprise, on installe un nouvel atelier. Pendant la période de « mise en route », la production le n-ième jour (n, entier naturel non nul) est donnée par :

$$U_n = 80 - 27\mathrm{e}^{-0,1n} \text{ (unités).}$$

   a. Montrer que la suite (U_n) est strictement croissante.

   b. Au bout de combien de jours la production dépassera-t-elle les 72 unités ?
3. On pose : $V_n = \mathrm{e}^{-0,1n}$ (n, entier naturel non nul).

   a. Montrer que V_n est une suite géométrique dont on donnera la raison et la limite.

   b. Calculer $S = V_1 + V_2 + \ldots + V_{12}$.
   À la suite d'une avarie, l'atelier doit être arrêté après 12 jours de fonctionnement. Quelle est la production totale obtenue pendant cette période ? Donner une valeur arrondie à l'unité.

Problème **10 points**
Commun à tous les candidats

Une entreprise fabrique un produit, en quantité x, exprimée en milliers de tonnes.
Le coût total de fabrication est donné par :

$$C_T(x) = \frac{x}{4} + \frac{9}{2}\ln(x+1)$$

pour $x \in [0\,;\,5]$.
Les coûts sont exprimés en millions de francs.

A. Étude d'une fonction auxiliaire *f* définie sur [0 ; 5]

On considère la fonction f définie sur $[0\,;5]$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{9x}{x+1} - 9\ln(x+1).$$

1. Calculer $f'(x)$.
   Vérifier que l'on peut écrire $f'(x) = \dfrac{x(x-2)(x+4)}{(x+1)^2}$.
2. Établir le tableau de variations de f sur $[0\,;5]$.
3. En déduire que f s'annule sur $]0\,;\,5\,]$ pour une valeur unique a.
4. Déterminer un encadrement à 10^{-3} près de a (on précisera la méthode utilisée).
5. Déduire des résultats précédents le signe de f sur $[0\,;5]$.

B. Étude d'un coût moyen C_m

La fonction coût moyen C_m est définie sur $]0\,;5]$ par :

$$C_m(x) = \frac{C_T(x)}{x} = \frac{x}{4} + \frac{9}{2}\left[\frac{\ln(x+1)}{x}\right].$$

1. Calculer $C'_m(x)$.
   Vérifier que l'on peut écrire $C'_m(x) = \dfrac{f(x)}{2x^2}$ où f est la fonction auxiliaire de la question **A**

2. Étudier le sens de variation de C_m sur $]0~;~5]$.
3. Pour quelle production l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimal, exprimé en francs par tonnes ?

   Quel est ce coût ?