Baccalauréat C Antilles juin 1996

EXERCICE 1 **4 points**

Une urne contient une boule rouge, deux boules blanches et trois boules noires.

1. On extrait simultanément trois boules de cette urne. On suppose que tous les tirages sont équiprobables.
   Soit X la variable aléatoire « Nombre de boules blanches tirées parmi les trois boules extraites ».
   Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance mathématique et son écart type.
2. On extrait successivement trois boules de cette urne, en remettant après chaque tirage la boule extraite de l'urne.
   On suppose tous les tirages équiprobables.
   Soit Y la variable aléatoire « Nombre de tirages où apparaît une boule blanche ».
   Déterminer la loi de probabilité de Y et son espérance mathématique.

EXERCICE 2 OBLIGATOIRE **6 points**

1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue Z :

$$Z^3 - 12Z^2 + 48Z - 128 = 0.$$

   a. Vérifier que 8 est solution de cette équation.
   Déterminer les nombres réels α, β et γ tels que, pour tout nombre complexe Z :

$$Z^3 - 12Z^2 + 48Z - 128 = (Z-8)\left(\alpha Z^2 + \beta Z + \gamma\right).$$

   b. Résoudre alors l'équation (E)

2. $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ est un repère orthonormal du plan orienté (unité : 1 cm).
   On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = 2 - 2\text{i}\sqrt{3}, \quad b = 2 + 2\text{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad c = 8.$$

   a. Calculer le module de $a, |a|$ et donner un argument de a.
   b. Calculer le nombre complexe $q = \dfrac{a-c}{b-c}$, déterminer son module et son argument φ. En déduire, la nature du triangle ABC.
   c. Déterminer le barycentre D des points pondérés (A, $|a|$), (B, $|b|$), (C, $|c|$). Placer D.
   d. Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que :

$$\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right\|.$$

   Tracer Γ.

EXERCICE 2 SPÉCIALITÉ **6 points**

$\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ est un repère orthonormal direct du plan orienté, l'unité graphique est 2 cm.
On considère l'application f de ce plan privé de O dans lui-même qui à tout point M d'affixe z non nulle associe le point M' d'affixe :

$$z' = z + \frac{1}{z}$$

1. **a.** On considère les points P, Q, R, U d'affixes respectives $2, -2, \mathrm{i}, -2\mathrm{i}$. Calculer les affixes de leurs images par f notées P$'$, Q$'$, R$'$, U$'$. Placer ces points.

   b. Soit E$'$ le point d'affixe -1. Montrer que E$'$ est l'image par f de deux points E_1 et E_2 dont on calculera le affixes z_1 et z_2. Calculer $|z_1|$ (ou bien $|z_2|$) et utiliser ce résultat pour placer E_1 et E_2. Placer E$'$.

2. On se propose de déterminer l'ensemble $\left(\Gamma'\right)$ des points M' lorsque M décrit une courbe (Γ) donnée.

   a. Préliminaire : on note r le module de z et θ son argument ; on désigne par x' et y' les coordonnées de M'.

   Donner l'écriture algébrique de z' en fonction de r et θ et montrer que l'on a :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \left(r+\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta \\ y' & = & \left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta \end{array}\right.$$

   b. On suppose que M décrit le cercle (Γ_1) de centre O et de rayon 1.

   • Justifier que les points R$'$ et E$'$ appartiennent à $\left(\Gamma'_1\right)$.

   • Déduire du 2. a. une représentation paramétrique de (Γ_1) et préciser la nature de (Γ_1).

   c. On suppose que M décrit le cercle (Γ_2) de centre O et de rayon 2.

   Justifier que les points P$'$, Q$'$ et U$'$ appartiennent à $\left(\Gamma'_2\right)$.

   Donner une représentation paramétrique de $\left(\Gamma'_2\right)$. En déduire que $\left(\Gamma'_2\right)$ est une ellipse dont on donnera une équation cartésienne.

   Préciser les éléments géométriques (sommets, foyers, directrices, excentricité) de $\left(\Gamma'_2\right)$ et tracer $\left(\Gamma'_2\right)$.

PROBLÈME **10 points**

Partie A - Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 5\frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan, l'unité graphique est 1 cm.

1. Étudier les limites de f respectivement en 0 et en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ?
2. Étudier le sens de variation de f et donner le tableau de ses variations.
3. Donner une équation de la tangente (T) à (C) en son point A d'abscisse 1. Tracer (T) et (C).
4. Soit le domaine plan

$$(D) = \{M(x\,;\,y) / 1 \leqslant x \leqslant \mathrm{e}^2 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

   Calculer l'aire en cm^2 de (D) à l'aide d'une intégration par parties.

Partie B - Étude de l'équation $f(x) = -5$

1. Justifier l'affirmation : « l'équation $f(x) = -5$ admet sur $]0\,;\,+\infty[$ une solution unique α, et $0{,}4 < a < 0{,}6$ ».

2. **a.** On pose pour x strictement positif $h(x) = \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$.

Vérifier que α est solution de l'équation :

$$h(x) = x.$$

b. Calculer $h'(x)$, puis montrer que pour tout réel x de $[0,4\,;\;0,6]$ on a :

$$h(x) \in [0,4\ ;\ 0,6] \quad \text{et} \quad \left|h'(x)\right| \leqslant 0,43.$$

3. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 0,4 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = h\left(u_n\right).$$

a. Justifier successivement les affirmations :

- (u_n) est une suite d'éléments de $[0,4\,;\,0,6]$.
- Pour tout entier $n, |u_{n+1} - \alpha| \leqslant 0,43\,|u_n - \alpha|$.
- Pour tout entier $n, |u_n - \alpha| \leqslant 0,2 \times (0,43)^n$.
- La suite (u_n) converge vers α.

b. Déterminer leplus petit entier n_0 solution de l'inéquation

$$0,2 \times (0,43)^n \leqslant 10^{-4}.$$

Que représente u_{n_0} pour α ?

À l'aide de votre calculatrice, çalculer u_{n_0} et donner une approximation décimale à 10^{-5} du résultat affiché.