Antilles-Guyane Baccalauréat mathématiques juin 1957

I. 1er sujet

Définition et recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres.

Application : 4 433 et 1 364.

I. 2e sujet

Montrer que, si un nombre divise le produit de deux nombres en étant premier avec l'un d'eux, il divise l'autre.

Application : Si un nombre est séparément divisible par deux nombres premiers entre eux, il est divisible par leur produit.

I. 3e sujet

La suite des nombres premiers est illimitée.

II.

1. On considère un triangle ABC et un point M de son plan non situé en un sommet ; on appelle Q et R les symétriques de M par rapport aux côtés AC et AB.
   - **a.** Montrer que l'angle de la droite AM et de la médiatrice de QR a les mêmes bissectrices que l'angle A du triangle.
   - **b.** Soient AX, BY, CZ, trois droites définies de la manière suivante :

     (AX, AM) a les mêmes bissectrices que (AB, AC) ;

     (BY, BM) a les mêmes bissectrices que (BC, BA) ;

     (CZ, CM) a les mêmes bissectrices que (CA, CB).

     Montrer que AX, BY, CZ sont concourantes en un point M$'$, ou parallèles.
2. Dans tout ce qui suit on suppose que le triangle ABC a ses trois angles aigus et que le point M est intérieur au triangle. Le point M$'$ associé à M par la construction du **1. b.** est appelé inverse de M par rapport au triangle.
   - **a.** Soient α, β, γ les projections de M sur BC, CA, AB et α', β', γ' les projections de M$'$ sur les mêmes côtés ; montrer que les six points, α, β, γ, α', β', γ' sont situés sur un même cercle, dont on déterminera le centre ω, et que

     $$\overline{\alpha \mathrm{M}} \cdot \overline{\alpha' \mathrm{M}'} = \overline{\beta \mathrm{M}} \cdot \overline{\beta' \mathrm{M}'} = \overline{\gamma \mathrm{M}} \cdot \overline{\gamma' \mathrm{M}'}.$$
   - **b.** Quel est l'inverse par rapport au triangle ABC du point de concours H des hauteurs de ce triangle ?

     Montrer qu'il existe une ellipse (E) tangente aux côtés du triangle et admettant le point H comme foyer.

     Déterminer le cercle principal de (E).
   - **c.** Les tangentes à (E) menées d'un point A$'$ du cercle circonscrit au triangle ABC recoupent ce cercle en B$'$ et C$'$.

     Soit (E$'$) la conique tangente aux côtés du triangle A$'$B$'$C$'$ et admettant comme foyer le centre du cercle circonscrit a ABC.

     Determiner son deuxieme foyer et son cercle principal.