Baccalauréat ES Antilles–Guyane juin 1998

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Le directeur d'une fabrique de microprocesseurs constate que 4 % de la production journalière est défectueuse. Un responsable qualité propose une vérification systématique des microprocesseurs. Cette vérification n'est pas parfaite, elle ne détecte que 95 % des microprocesseurs défectueux et déclare défectueux 2 % des microprocesseurs qui ne présentent pourtant aucun défaut.
On prend au hasard l'un des microprocesseurs dans une production journalière.
On appelle :
- M l'évènement « le microprocesseur est défectueux » ;
- R l'évènement « le microprocesseur est rejeté après vérification ».
La notation $p(A/B)$ désignant la probabilité de l'évènement A sachant que B est réalisé.

1. Préciser les probabilités : $p(M)$, $p(R/M)$, $p\left(R/\overline{M}\right)$.
2. Calculer la probabilité de l'évènement (M et R) ainsi que celle de l'évènement $\left(\overline{M} \text{ et } R\right)$.
3. Calculer la probabilité que le microprocesseur soit défectueux et déclaré bon par la vérification.
4. Calculer la probabilité que le microprocesseur soit bon sachant que la vérification va le déclarer « à rejeter ».

Exercice 2 5 points
(obligatoire)

Dans cet exercice, les résultats numériques pourront être obtenus à l'aide de la calculatrice, sans justification. lis seront arrondis à 10^{-2} *près, sauf indication contraire.*

Le tableau suivant donne l'évolution du nombre d'étudiants inscrits dans l'enseignement supérieur depuis 1960 (en milliers d'étudiants), en France métropolitaine.

Année scolaire	1960-1961	1970-1971	1980-1981	1990-1991	1993-1994
Rang de l'année : x_i	1	11	21	31	34
Nombre d'étudiants (en milliers) : y_i	309,7	850,6	1 174,8	1 698,7	2 074,6

Source : *Repères et références statistiques sur les enseignements et la formation.* Édition 1995. D.E.P.

1. **a.** Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y. Peut-on envisager un ajustement affine ?
   b. Donner une équation de la droite de régression de y en x.
   c. En supposant que l'évolution se poursuive de la même façon pour les années suivantes, donner une estimation du nombre d'étudiants qui seront inscrits dans l'enseignement supérieur en 1998-1999. (Arrondir au millier supérieur).
2. **a.** On décide de faire un ajustement exponentiel, en ignorant la première donnée, correspondant à l'année 1960-1961. Pour cela, on pose $z_i = \ln\left(y_i\right)$.
   Après l'avoir recopié, compléter le tableau suivant par les valeurs de z_i.

Rang de l'année : x_i	11	21	31	34
$z_i = \ln(y_i)$				

   b. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et z. Peut-on envisager un ajustement affine ?
   c. Donner une équation de la droite de régression de z en x.

d. En supposant que l'évolution se poursuive de cette façon, donner une valeur approchée de z_{39}, puis proposer une deuxième estimation du nombre d'étudiants qui seront inscrits dans l'enseignement supérieur en 1998-1999.

Exercice 2 5 points
(spécialité)

On définit deux suites de nombres réels, U et V par les conditions suivantes $U_0 = 9$ et pour tout n entier ($n \geqslant 0$),

$$U_{n+1} = \sqrt{U_n} \quad ; \quad V_n = \ln(U_n).$$

1. Dans cette question nous nous intéresserons au calcul des premiers termes des suites U et V.
  a. Donner les valeurs de $U_0,\ U_1,\ U_2,\ U_3$.
  b. Exprimer $V_0,\ V_1,\ V_2,\ V_3$ en fonction de $\ln(3)$.

2. Dans les deux questions suivantes nous allons étudier la suite V.
  a. Montrer que la suite V est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
  b. Calculer V_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite V ?

3. On s'intéresse dans cette question au comportement de la suite U.
  a. Calculer U_n en fonction de V_n.
  b. Donner alors la limite de U_n lorsque n tend vers l'infini.

Problème **11 points**
Partie A

Soit f la fonction numérique définie sur $[0~;~+\infty[$, dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée (annexe I, ci-après), dans un repère orthogonal.

1. Au moyen d'une lecture graphique, donner, sous forme de tableau, le signe de f sur $[0~;+\infty[$.

2. Soit F une primitive de f sur $[0~;+\infty[$.
L'une des trois courbes des figures 2 a, 2 b, 2 c (annexe II) est la représentation graphique de F sur $[0~;+\infty[$.
En utilisant le résultat du 1, déterminer celle de ces courbes qui convient et noter sur votre copie la référence de cette courbe.

3. Calculer, en unité d'aire, la valeur exacte $\mathscr{A}$ de l'aire du domaine D compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $= \dfrac{1}{2}$ et $x = 2$.
Sur le graphique, donné ci-dessous, hachurer ce domaine D et joindre cette annexe à votre copie.

4. Au moyen d'une lecture graphique, déterminer les valeurs de $f(0)$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $f'\left(\dfrac{3}{2}\right)$.
Reporter ces valeurs dans le tableau correspondant (à joindre à votre copie).

Partie B

Soit g la fonction numérique définie sur $]-\infty~;~+\infty[$ par

$$g(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{x}.$$

On note Γ la courbe représentative de g.

1. Calculer la limite de g quand x tend vers - ∞.

2. Montrer que $g(x)$ peut s'écrire : $g(x) = \left(\dfrac{2x}{\mathrm{e}^x} - \mathrm{e}^{-x}\right)$.

   Calculer la limite de g en $+\infty$.

   Quelle conclusion peut-on tirer du résultat de ce calcul ?

3. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.

4. Dresser le tableau des variations de g.

5. Écrire une équation de la tangente T à Γ au point d'abscisse 0.

   En admettant que la courbe donnée ci-dessous représente, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la fonction g, tracer sur ce graphique la droite T et la courbe Γ.

Annexe I : courbe de la fonction f

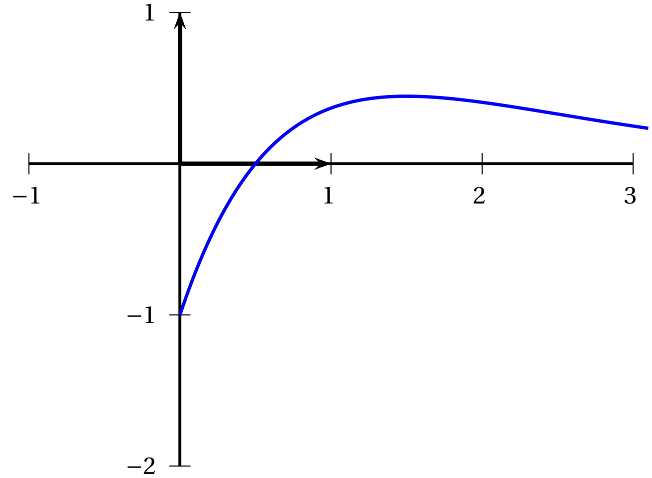


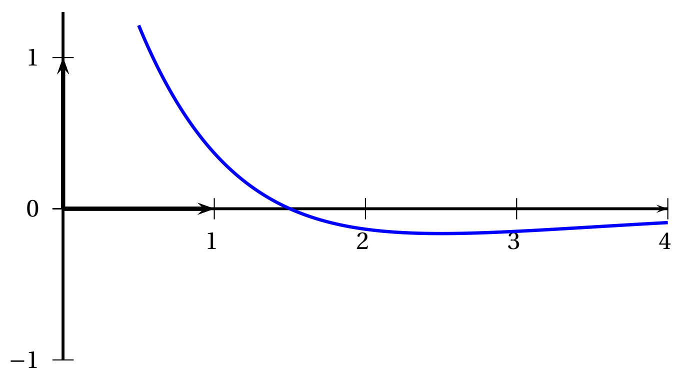
Tableau de valeurs pour la fonction f, à compléter au moyen d'une lecture graphique

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
$f(x)$			$2\mathrm{e}^{\left(-\frac{3}{2}\right)}$
$f'(x)$	3	$2\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{2}\right)}$	

Annexe II :

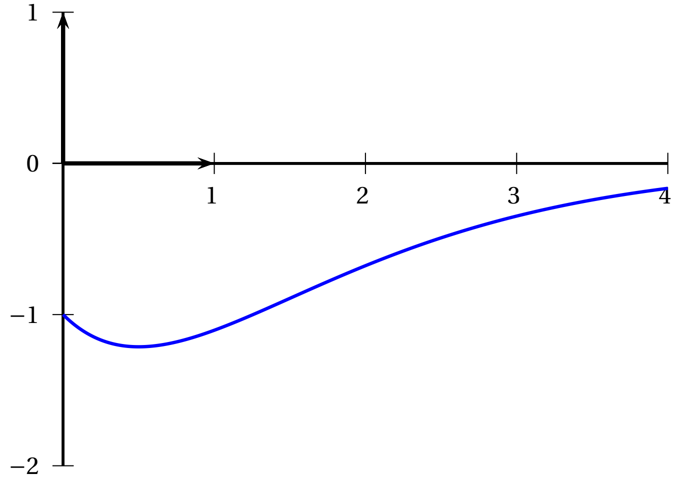
Courbe 2 a représentative de F_{a}.

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
$F(x)$	3	$\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$	0	$-\frac{1}{\mathrm{e}^2}$	
$F'(x)$	0				0



Courbe 2 b représentative de F_{b}.

x	0	$\frac{1}{2}$	2
$F(x)$	-1	$-\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$	$-\frac{5}{\mathrm{e}^2}$
$F'(x)$		0	



Courbe 2 c représentative de F_c.

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2
$F(x)$	$\frac{3}{2}$	$\sqrt{e}$	0	$-\frac{e^2}{2}$
$F'(x)$		0