Baccalauréat STT C.G.–I.G.
Antilles-Guyane juin 1999

Exercice 1 **5 points**

Partie A

On considère les droites D_1, D_2, D_3 et D_4 d'équations respectives :

$$\begin{aligned} y &= -\frac{5}{6}x+\frac{50}{3} \\ y &= -\frac{2}{5}x+15 \\ y &= -\frac{5}{4}x+20 \\ y &= -x+12 \end{aligned}$$

1. Construire ces droites dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Unité graphique : 1 cm.
2. Calculer les coordonnées du point d'intersection I des droites D_1 et D_2.
3. Déterminer graphiquement l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;\,y)$ telles que :

$$\left\{\begin{array}{lll} x & \geqslant & 0 \\ y & \geqslant & 0 \\ 5x+6y & \leqslant & 100 \\ 2x+5y & \leqslant & 75 \\ 5x+4y & \leqslant & 80 \\ x+y & \geqslant & 12 \end{array}\right.$$

On hachurera la partie du plan qui ne convient pas.

Partie B

Pour la fabrication de tartes on utilise de la farine, du beurre et des fruits.
Le tableau ci-dessous nous donne la quantité des différents composants, exprimée en grammes, selon la nature de la tarte.

	Farine en g	Beurre en g	Fruits en g
Tarte à pâte brisée	250	100	500
Tarte à pâte feuilletée	300	250	400

Un restaurateur fabrique x tartes à pâte brisée et y tartes à pâte feuilletée et chaque jour il dispose de 5 kg de farine, de 3,750 kg de beurre et 8 kg de fruits ; de plus il doit fabriquer au moins 12 tartes chaque jour.

1. Montrer que x et y doivent être solution du système de la première partie 3.
Les couples suivants vérifient-ils le système d'inéquations donné :

$$(10\,;\,1) \quad ; \quad (13\,;\,2) \quad \text{et} \quad (10\,;\,10)\ ?$$

2. Le bénéfice du restaurateur est de 35 F sur une tarte à pâte brisée et de 40 F sur une tarte à pâte feuilletée.
Exprimer en fonction de x et de y le bénéfice B réalisé par la vente de x tartes à pâte brisée et de y tartes à pâte feuilletée.

Construire dans le repère de la première partie la droite à laquelle appartiennent les points M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ correspondant à un bénéfice de 560 F.

En expliquant la méthode, déterminer le nombre de tartes de chaque sorte à fabriquer pour obtenir un bénéfice maximal.

Exercice 2 **5 points**

Chaque probabilité sera exprimée sous forme de fraction irréductible.

Dans une boite un jeune enfant dispose de quatre cubes : un jaune, un rouge, un vert, un bleu, et de deux boules : une rouge et une verte.
Il prend au hasard un objet puis, sans remettre le premier tiré, il en prend un second.
Il obtient ainsi un couple d'objets que l'on appellera « tirage » : (cube bleu ; cube rouge) est un tirage possible.

1. À l'aide d'un arbre, trouver le nombre de tirages possibles.
2. Trouver la probabilité de chacun des évènements suivants :
   A : « il a obtenu deux cubes » ;
   B : « il a obtenu deux boules » ;
   C : « il a obtenu soit un cube et une boule, soit une boule et un cube» ;
   D : « il a obtenu deux objets de la même couleur » ;
   E : « il a obtenu deux objets de couleur différente ».
   On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

Problème **10 points**

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm) on considère la courbe C représentant une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{\text{e}}\ ;\ +\infty\right[$ construite ci-après.

1. Lire $f(1)$; $f(\text{e})$; $f'(1)$.
2. Lire le sens de variation de f. Faire son tableau de variations.
3. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 1$ puis l'équation $f(x) = 4$.
4. Donner, à l'aide du graphique, une valeur approchée à $0,5$ près de la solution α de l'équation $f(x) = 0$.
   En déduire, selon les valeurs de x, le signe de $f(x)$.
5. Hachurer l'ensemble délimité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \text{e}$.
   Donner, en unité d'aire, une valeur approchée à une unité près, de l'aire de cet ensemble.

Partie B

L'étude de cette partie consiste à vérifier par le calcul certains résultats de la partie précédente.

Soit f la fonction définie sur $\left[\dfrac{1}{\text{e}}\ ;\ +\infty\right[$ par

$$f(x) = 2x(1 - \ln x) + 1$$

et représentée par la courbe C donnée dans la première partie.

1. Donner la valeur exacte de $f(1)$; $f(\text{e})$; $f\left(\frac{1}{\text{e}}\right)$; $f\left(\text{e}^2\right)$.

2. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3. Calculer $f'(x)$ où f' désigne la dérivée de f et étudier son signe.

4. Établir le tableau de variations de f.

5. Trouver une équation de la tangente à C au point d'abscisse e et construire cette tangente sur le graphique.

6. Résoudre sur l'intervalle $\left[\frac{1}{\text{e}}\ ;\ +\infty\right[$, par le calcul, l'équation $f(x) = 1$.

7. **a.** Soit F la fonction définie sur l'intervalle $\left[\frac{1}{\text{e}}\ ;\ +\infty\right[$ par

$$F(x) = \frac{3}{2}x^2 - x^2 \ln x + x.$$

Montrer que F est une primitive de f sur $\left[\frac{1}{\text{e}}\ ;\ +\infty\right[$.

b. Calculer l'aire exacte, exprimée en unité d'aire, de la partie de plan délimitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \text{e}$.

Exprimer cette aire en cm^2 puis en donner une valeur approchée à 0,1 près (en cm^2).