Durée : 4 heures

Baccalauréat C Antilles–Guyane juin 1994

EXERCICE 1 **4 points**

Enseignement obligatoire

Une boîte contient 60 boules blanches et 40 boules noires. On effectue dans cette boîte des tirages successifs avec remise de chaque boule après tirage. On s'arrêtera à l'obtention d'une boule blanche.

A.

Dans cette question, on ira au maximum à 4 tirages. On appellera X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la première boule blanche. Par convention, X sera égal à 0 si l'on n'obtient pas de boule blanche après les 4 tirages.

1. Calculer la probabilité pour que X soit égal à 0.

2. Calculer la probabilité pour que X soit égal à k, k valant successivement 1, 2, 3 et 4.

B.

Dans cette question, on procédera à n tirages au maximum, n étant un entier naturel non nul.

De même, on appellera X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la première boule blanche et ici encore X sera nul si l'on n'obtient pas de boule blanche après n tirages.

1. Calculer la probabilité pour que X soit égal à k, k étant un entier naturel variant de 1 à n.

2. On considère le polynôme P tel que :

$$P(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}.$$

Soit $\text{E}(X)$ l'espérance de la variable aléatoire X. Montrer que :

$$E(X) = \frac{3}{5}P\left(\frac{2}{5}\right).$$

3. On sait que pour tout réel x différent de 1, on a :

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

a. En dérivant les deux termes de l'égalité précédente, en déduire une autre expression de :

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}.$$

b. En déduire que $\text{E}(X) = \dfrac{5}{3} - \left(n + \dfrac{5}{3}\right)\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de de spécialité

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm, on considère l'ensemble E des points M d'affixe z tels que :

$$|z - 1 - \text{i}| = \frac{1}{4}\left|z + \text{i}\overline{z} - 8(1+\text{i})\right|.$$

1. Soit p l'application du plan dans lui-même, qui à un point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{1}{2}\left[z - \mathrm{i}\overline{z} + 8(1+\mathrm{i})\right].$$

On pourra poser : $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$ où x, y, x' et y' sont des réels.

   a. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $p(M) = M$.

   b. Montrer que pour tout point M, les coordonnées du point M' vérifient l'équation : $x' + y' - 8 = 0$. On appellera (D) la droite décrite par les points M'.

   c. Montrer que $\overrightarrow{MM'}$ est vecteur normal à la droite (D). Caractériser géométriquement l'application p.

2. On se propose de déterminer l'ensemble E défini au début de l'exercice.

   a. Montrer que : $z - z' = \dfrac{1}{2}\left(z + \mathrm{i}\overline{z} - 8(1+\mathrm{i})\right)$.

   b. En déduire que l'ensemble E est une ellipse de foyer F d'affixe $(1+\mathrm{i})$ et de directrice (D), d'excentricité $\dfrac{1}{2}$. Préciser l'axe focal.

   c. Vérifier que les points A et A$'$ d'affixes respectives $(2+2\mathrm{i})$ et $(-2-2\mathrm{i})$ sont deux sommets de E.

3. Allure de l'ensemble E.

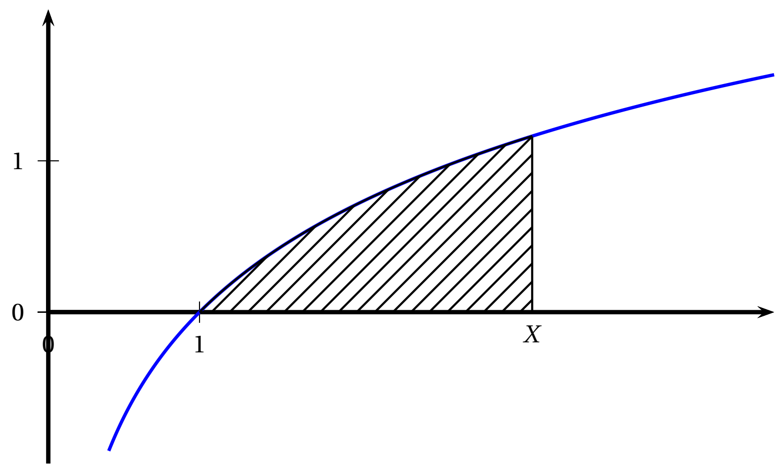
   a. Construire dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ la droite (D), l'axe focal, les points A, A$'$ et F.

   b. Déterminer géométriquement les deux autres sommets de l'ellipse.

   c. Donner l'allure de E.

PROBLÈME **11 points**

On note $f(X)$ l'aire de la région comprise entre la courbe d'équation « $y = \ln x$ », l'axe des abscisses et les droites d'équations « $x = 1$ » et « $x = X$ » (avec $X \neq 1$).



L'objet du problème est l'étude de quelques équations du type $f(X) = k$ où X est l'inconnue et k un entier naturel fixé.

Partie A

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$f(X) = X\ln X - X + 1.$$

2. **a.** Calculer la limite de $f(X)$ quand X tend vers $+\infty$.

   b. Montrer que la fonction f est croissante sur $[1~;~+\infty[$ et dresser son tableau de variations.

   c. En déduire que pour tout entier naturel k, l'équation $f(X) = k$ a exactement une solution. On note X_k cette solution.

3. Calculer X_0 et X_1.

4. **a.** À l'aide des variations de la fonction f, montrer que la suite (X_k) est strictement croissante.

   b. Montrer que pour tout entier naturel k :

$$\int_{X_k}^{X_{k+1}} \ln t\,\mathrm{d}t = 1.$$

   Sachant que pour tout t élément de l'intervalle $[X_k~;~X_{k+1}]$, on a :

$$\ln X_k \leqslant \ln t \leqslant \ln X_{k+1},$$

   en déduire que pour tout entier naturel k on a :

$$(X_{k+1} - X_k)\ln X_k \leqslant 1 \leqslant (X_{k+1} - X_k)\ln X_{k+1}$$

   puis que pour tout entier naturel $k \geqslant 1$ on a :

$$X_k + \frac{1}{\ln X_{k+1}} \leqslant X_{k+1} \leqslant X_k + \frac{1}{\ln X_k}.$$

   c. Montrer que : $X_2 \leqslant \mathrm{e} + 1$ puis que $X_2 \geqslant \mathrm{e} + \dfrac{1}{\ln(\mathrm{e}+1)}$.

Partie B

On se propose dans cette partie, de rechercher une valeur approchée de X_2 à 10^{-2} près.

1. **a.** Vérifier que X_2 est dans l'intervalle $\mathrm{I} = [3~;4]$.

   b. Montrer que X_2 est solution de l'équation $x = \mathrm{e}^{1+\frac{1}{x}}$.

2. Soit Φ la fonction définie sur I par $\Phi(x) = \mathrm{e}^{1+\frac{1}{x}}$.

   a. Étudier les variations de Φ.

   b. Montrer que l'image de I par Φ est incluse dans I.

   c. Montrer que pour tout x de I on a : $\left|\Phi'(x)\right| \leqslant \dfrac{4}{9}$.

3. Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n :
   $U_{n+1} = \Phi(U_n)$.

   a. Montrer par récurrence que pour tout entier n, U_n appartient à l'intervalle I.

   b. Montrer que pour tout entier n on a :

$$|U_{n+1} - X_2| \leqslant \frac{4}{9}\,|U_n - X_2|.$$

   (On se rappellera que $\Phi(X_2) = X_2$.)

   En déduire que pour tout entier n on a :

$$|U_n - X_2| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

c. Déterminer un entier n tel que U_n soit une valeur approchée de X_2 à 10^{-2} près,

Donner cette valeur approchée de X_2.