Durée : 4 heures

∾ Baccalauréat C Antilles-Guyane juin 1992 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$z^2-\left(1+\sqrt{2}\right)z+\sqrt{2}=0.$$

2. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes les équations :

$$\begin{array}{lrcl}(1) & z+\dfrac{1}{z} & = & 1\\ (2) & z+\dfrac{1}{z} & = & \sqrt{2}\end{array}$$

3. Soit $P(z)$ le polynôme de la variable complexe z tel que :

$$P(z)=z^4-(1+\sqrt{2})z^3+(2+\sqrt{2})z^2-(1+\sqrt{2})z+1.$$

   a. Vérifier que pour tout z non nul, on a :

$$\frac{P(z)}{z^2}=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-\left(1+\sqrt{2}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)+\sqrt{2}.$$

   b. En utilisant ce qui précède, résoudre l'équation $P(z)=0$.

EXERCICE 2 **4 points**

ABCD est un rectangle du plan, de diagonales [AC] et [BD] de longueur a.

1. Soit m un réel non nul. On note G_m le barycentre du système : $\{(\text{A},\ m)\ ;\ (\text{B},\ -1)\ ;\ (\text{C},\ 1)\}$.
   a. Préciser la position de G_1.
   b. Déterminer l'ensemble E_1 des points G_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$.
2. Quel est l'ensemble E_2 des points M du plan tels que :

$$\left\|\overrightarrow{M\text{A}}-\overrightarrow{M\text{B}}+\overrightarrow{M\text{C}}\right\|=a\,?$$

3. Quel est l'ensemble E_3 des points M du plan tels que

$$M\text{A}^2-M\text{B}^2+M\text{C}^2=\frac{a^2}{4}\,?$$

4. Faire une figure où l'on représentera le rectangle ABCD et les ensembles E_1, E_2 et E_3.

PROBLÈME **12 points**

Partie A

Soit f la fonction numérique définie pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x)=x\ln(x)-x,\ \text{pour } x>0\quad \text{et } f(0)=0.$$

1. **a.** Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

b. Pour x strictement positif, calculer f' la fonction dérivée de f et déterminer son signe.

Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis dresser le tableau de variations de f.

2. Soit (C) la représentation graphique de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité : 1 cm), et soit (D) la droite d'équation : « $y = x - 1$ ».

Soit u la fonction numérique définie pour tout x de $]0~;~+\infty[$ par :

$$u(x) = x\ln(x) - 2x + 1.$$

a. Calculer u' la fonction dérivée de u et déterminer son signe. Calculer les limites de u en 0 et $+\infty$.

Dresser le tableau de variations de u.

b. Montrer que l'équation « $u(x) = 0$ » possède exactement deux solutions que l'on notera a et b, $(a < b)$.

En déduire que (D) et (C) se coupent en deux points A et B d'abscisses respectives a et b.

c. Déterminer le signe de $u(x)$.

d. Montrer que a appartient à $]0~;~1[$ et que b appartient à $]6~;~7[$.

3. Tracer dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ la courbe (C) et la droite (D).

On se limitera à l'intervalle $[0~;~8]$.

4. Soit Δ le domaine du plan limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations : « $x = a$ » et « $x = b$ » (a et b définis dans le A. 2. b.).

a. Montrer que S, l'aire en cm^2 de Δ, s'exprime sous la forme :

$$\int_a^b (2x - 1 - x\ln x)\,\mathrm{d}x.$$

b. En intégrant par parties, calculer $\displaystyle\int_a^b x\ln x\,\mathrm{d}x$ en fonction de a et b.

En déduire l'expression de S en fonction de a et b.

Partie B

On se propose de déterminer une valeur approchée de b. Pour cela, on considère la fonction numérique h définie sur $]\text{e}~;~+\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{x-1}{\ln(x) - 1}.$$

1. **a.** Montrer que, pour tout x élément de $]\text{e}~;~+\infty[$, h' désignant la fonction dérivée de h, on a :

$$h'(x) = -\frac{u(x)}{x[\ln(x) - 1]^2}$$

où u est la fonction définie dans la question A. 2.

En déduire le signe de h' sur $]\text{e}~;~+\infty[$.

b. Déterminer les limites de h aux bornes de son ensemble de définition.

Vérifier que $h(b) = b$. Dresser le tableau de variations de h.

2. Montrer que pour tout x de l'intervalle $[6\,;7]$, on a :

$$x(\ln(x)-1)^2 \geqslant 6(\ln(6)-1)^2.$$

En déduire que pour tout x de l'intervalle $[6\,;7]$, on a :

$$\left|h'(x)\right| \leqslant \frac{u(7)}{6(\ln(6)-1)^2} \leqslant 0,17.$$

3. **a.** Déterminer l'image de l'intervalle $[b\ ;\ 7]$ par h et démontrer qu'elle est incluse dans l'intervalle $[b\ ;\ 7]$.

b. Soit (U_n) la suite numérique définie pour tout entier naturel n par :

$$U_0 = 7 \quad \text{et} \quad U_{n+1} = h\left(U_n\right).$$

Montrer que pour tout entier naturel n, U_n appartient à l'intervalle $[b\ ;\ 7]$.

c. Montrer, en utilisant l'inégalité des accroissements finis, que pour tout entier naturel n, on a :

$$\left|U_{n+1}-b\right| \leqslant 0,17\left|U_n-b\right|.$$

En déduire que pour tout entier naturel n, $\left|U_n-b\right| \leqslant 0,17^n$.

d. Montrer que la suite (U_n) converge vers b.

Déterminer un entier n tel que U_n soit une valeur approcheée de b à 10^{-4} près.

Calculer cette valeur approcheée.