Durée : 4 heures

Baccalauréat C Antilles-Guyane septembre 1992

EXERCICE 1 **4 points**

On considère dans le plan un triangle ABC tel que : AB = 7, BC = 4 et AC = 5 (unité graphique = 1 cm). Soit I le milieu de [BC].

1. Montrer que $\text{AI} = \sqrt{33}$.
2. **a.** Soit M un point du plan.
   Pour quelle valeur du réel m le vecteur $m\overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}}$ est-il égal à un vecteur $\overrightarrow{U}$ indépendant du point M ?
   Déterminer alors le vecteur $\overrightarrow{U}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{\text{AI}}$.

   b. Déterminer et construire l'ensemble E des points M du plan tels que :
   $$-2M\text{A}^2 + M\text{B}^2 + M\text{C}^2 = -58.$$
3. Soit D le barycentre du système : $\{(\text{A},\ -1) ; (\text{B},\ 1) ; (\text{C},\ 1)\}$.

   a. Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ? Justifier la réponse.

   b. Déterminer et construire l'ensemble F des points M du plan tels que :
   $$-M\text{A}^2 + M\text{B}^2 + M\text{C}^2 = -25.$$

EXERCICE 2 **4 points**

Une urne contient douze boules indiscernables au toucher : m boules blanches et n boules noires.

1. On tire successivement deux boules de l'urne, la boule tirée n'étant pas remise dans l'urne après le premier tirage.
   Déterminer les couples $(m,\ n)$, pour que la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes soit égale à $\dfrac{16}{33}$.
2. On prend désormais $m = 8$ et $n = 4$.
   On tire successivement 3 boules de l'urne, la boule tirée étant remise dans l'urne après chaque tirage.

   a. Calculer la probabilité d'obtenir exactement une boule blanche.

   b. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche et au moins une boule noire.
   (On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles).

PROBLÈME **12 points**

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$\begin{aligned} \text{pour } n = 0 : \quad f_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \\ \text{pour } n \geqslant 1 : \quad f_n(x) &= \frac{x^{3n}}{\sqrt{1+x^3}} \end{aligned}$$

On désignera par $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ ayant comme unité graphique 4 cm.

Partie A

1. Déterminer les limites de f_0 aux bornes de son ensemble de définition.
   Étudier le sens de variation de f_0 et construire C_0 dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.
2. Soit n un entier naturel non nul.
   a. f_n' désignant la fonction dérivée de f_n, montrer que :
   $$f_n'(x) = \frac{x^{3n-1}\left[(6n-3)x^3+6n\right]}{2\left(1+x^3\right)\left(\sqrt{1+x^3}\right)}.$$
   b. Étudier le sens de variation de f_1 et f_2 puis dresser leur tableau de variations.
   c. Tracer C_1 et C_2 dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.

Partie B

Soit (I_n) la suite réelle définie pour tout entier naturel par :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $I_n \geqslant 0$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n non nul et pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, on a : $f_n(x) \leqslant x^{3n}$.
   En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $I_n \leqslant \dfrac{1}{3n-1}$.
3. Quelle est la limite de la suite (I_n) ?

Partie C

1. On partage le segment $[0\,;\,1]$ en dix segments de même longueur 0,1, par les points :
   $$a_0 = 0\,;\; a_1 = 0,1\,;\; a_2 = 0,2\,;\; a_3 = 0,3\,;\ldots\,;\; a_{10} = 1.$$
   a. Montrer que l'on a, pour tout entier naturel i de 0 à 9 :
   $$0,1 f_0\left(a_i\right) \geqslant \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_0(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0,1 f_0\left(a_{i+1}\right).$$
   b. En déduire que : $0,1\sum_0^9 f_0\left(a_i\right) \geqslant 0,1\sum_0^9 f_0\left(a_{i+1}\right) I_0 \geqslant 0,1.$
   c. Montrer, à l'aide de la calculatrice, que : $0,93 \geqslant I_0 \geqslant 0,89$.
2. **a.** En écrivant $f_1(x)$ sous la forme :
   $$f_1(x) = x\frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$$
   montrer en intégrant I_1 par parties que : $5I_1 = 2\sqrt{2} - 2I_0$.
   On remarquera que, pour tout x appartenant à $[0\,;\,1]$:
   $$\sqrt{1+x^3} = \frac{1+x^3}{\sqrt{1+x^3}}.$$
   b. En déduire un encadrement de I_1.
   c. Montrer de même que, pour tout entier naturel n non nul, on a :
   $$(6n+5)I_{n+1} = 2\sqrt{2} - (6n+2)I_n.$$