Durée : 3 heures

Baccalauréat L Antilles septembre 2002

EXERCICE 1 OBLIGATOIRE **(7 points)**

On considère un segment [AB] de longueur 10 centimètres et un point M de ce segment, différent de A et B. Les points N et P sont tels que AMNP est un carré.
L'objectif de l'exercice est de déterminer le point M du segment [AB] pour lequel la distance BN est minimale. Les distances sont exprimées en centimètres.

I. On pose A$M = x$.

1. Faire une figure.
2. Déterminer l'intervalle des valeurs possibles pour x.
3. Déterminer en fonction de x la distance BM.
4. Déterminer en fonction de x la distance BN.
   (On rappelle le théorème de Pythagore : dans un triangle ABC rectangle en A on a $\text{BC}^2 = \text{AB}^2 + \text{AC}^2$)

II. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 20x + 100}.$$

La fonction dérivée f' de f est définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par

$$f'(x) = \frac{2x - 10}{\sqrt{2x^2 - 20x + 100}}.$$

1. **a.** Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.
   b. Montrer que la fonction f admet un minimum sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ que l'on précisera.
2. **a.** Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal d'unité un centimètre.
   b. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 8$. On fera apparaître les traits de construction utiles et on donnera des valeurs approchées des solutions lues.

III. En utilisant les résultats précédents, déterminer le point M du segment [AB] pour lequel la distance BN est minimale.

EXERCICE 2 OBLIGATOIRE **(6 points)**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n,
$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 5$.

1. **a.** Calculer les termes u_1 et u_2.
   b. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? On justifiera les réponses.
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par

$$v_n = u_n + 10.$$

   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et calculer le premier terme v_0.
   b. Exprimer le terme général v_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n).

AU CHOIX exercice 3 ou exercice 4

EXERCICE 3 — 7 points

Une urne contient trois boules vertes, une boule bleue et cinq boules rouges.
On tire au hasard simultanément trois boules de cette urne.

1. Déterminer le nombre de choix possibles pour ce tirage.

2. On considère les évènements A, B, C et D suivants :
A : « Tirer trois boules rouges ».
B : « Tirer trois boules de la même couleur ».
C : « Ne tirer aucune boule verte ».
D : « Tirer au moins une boule verte ».

a. Montrer que la probabilité $p(\text{A})$ de l'évènement A est égale à $\dfrac{5}{42}$.

b. Déterminer la probabilité de chacun des événements B, C et D. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

3. Un tirage est gagnant si l'on tire trois boules rouges.
On effectue quatre tirages successifs en remettant à chaque fois les trois boules tirées dans l'urne. Tous les tirages sont indépendants.
Déterminer la probabilité d'obtenir exactement trois tirages gagnants. On donnera le résultat arrondi à 10^{-3}.

EXERCICE 4 — 7 points

On considère les nombres A= 8 387 592 115 et B = 9 276 312 516.

1. a. Montrer que 1 000 est divisible par 8.

b. Montrer que A est congru à 3 modulo 8.

c. Donner l'entier naturel b strictement inférieur à 8 tel que B soit congru à b modulo 8.

2. Déterminer les entiers naturels strictement inférieurs à 8 qui sont congrus respectivement à A+B et à AB.

3. a. Montrer que B^2 est divisible par 8.

b. Montrer que A^2 n'est pas divisible par 8.

c. Montrer que A^{100} n'est pas divisible par 8.