Durée : 4 heures

∾ Baccalauréat S Antilles–Guyane juin 1995 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Une épreuve consiste à jeter une fléchette sur une cible partagée en trois cases notées 1, 2, 3.
Deux concurrents A et B sont en présence. On admet qu'à chaque lancer, chacun d'eux atteint une case et une seule case et que les lancers sont indépendants.
Pour le concurrent A, les probabilités d'atteindre les cases 1, 2, 3 sont dans cet ordre : $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{7}{12}$.
Pour le concurrent B, les trois éventualités sont équiprobables.
N. B. : Les résultats demandés seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. Le concurrent A lance la fléchette trois fois. Les résultats des trois lancers sont indépendants.
   a. Quelle est la probabilité pour qu'il atteigne chaque fois la case 3 ?
   b. Quelle est la probabilité pour qu'il atteigne les cases 1, 2, 3 dans cet ordre ?
   c. Quelle est la probabilité pour qu'il atteigne les cases 1, 2, 3 ?
2. On choisit un des deux concurrents. La probabilité de choisir A est égale à deux fois là probabilité de choisir B.
   a. Un seul lancer est effectué. Quelle est la probabilité pour que la case 3 soit atteinte ?
   b. Un seul lancer a été effectué, et la case 3 a été atteinte. Quelle est la probabilité pour que ce soit le concurrent A qui ait lancé la fléchette ?

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

On se propose de déterminer quels sont les nombres complexes solutions de l'équation :

$$z^2 - 6z + 12 = 0 \qquad (E)$$

et de placer, par une construction géométrique, les images de ces nombres dans le plan complexe.

1. a. Résoudre l'équation (E). On note u et $\overline{u}$ ses solutions, u étant celle dont la partie imaginaire est positive.
   b. Calculer le module et un argument de u. En déduire le module et un argument de $\overline{u}$.
2. a. On considère le nombre complexe $u - 4$. Écrire ce nombre sous forme algébrique (cartésienne), puis sous forme trigonométrique.
   b. Calculer le module et un argument du nombre : $\dfrac{u}{u-4}$. En déduire le module et un argument du nombre $\dfrac{\overline{u}}{\overline{u}-4}$.
3. Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on note A le point d'affixe 4, B le point d'affixe 2 et C le point d'affixe 6. M et N sont les points d'affixe u et $\overline{u}$.
   a. En interprétant géométriquement les résultats du 2., démontrer que les points O, A, M, N sont sur un même cercle que l'on précisera.

b. Démontrer que les points $B,\ C,\ M,\ N$ sont aussi sur un même cercle que l'on précisera.

c. Construire les deux cercles ainsi obtenus, et les deux points M et N.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = a$ et $AC = 2a$. I désigne le milieu de $[AC]$ et G est le barycentre du système $\{(A,\ 3)\ ;\ (B,\ -2)\ ;\ (C,\ 1)\}$.

1. Construire le point G et préciser la nature du quadrilatère ABIG.
   Exprimer en fonction de a les distances $GA,\ GB$ et GC.
2. À tout point M du plan, on associe le nombre réel :

$$f(M) = 3MA^2 - 2MB^2 + MC^2.$$

   a. Exprimer $f(M)$ en fonction de MG et de a.

   b. Déterminer et construire l'ensemble (T) des points M du plan tels que :

$$f(M) = 2a^2.$$

3. À tout point M du plan, on associe maintenant le nombre réel :

$$h(M) = 3MA^2 - 2MB^2 - MC^2.$$

   a. Démontrer qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{U}$ non nul tel que :
   $h(M) = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{U} - 2a^2$.

   b. On désigne par P l'ensemble des points M du plan tels que :
   $h(M) = -2a^2$.
   Vérifier que les points I et B appartiennent à P, préciser la nature de cet ensemble. Construire P.

4. P et T sont sécants en deux points E et F. Montrer que les triangles GEC et GFC sont équilatéraux.

PROBLÈME **11 points**

Enseignement obligatoire

Partie 1

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$. Unité graphique 1 cm.

1. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$.
2. **a.** Vérifier que $f(x)$ peut s'écrire : $f(x) = \mathrm{e}^x\left(1 - \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)$.

   b. En déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
3. Calculer $f'(x)$ et établir le tableau des variations de f.
4. **a.** Montrer que la droite D d'équation $y = -x - 1$ est asymptote à $\mathscr{C}$ lorsque x tend vers moins l'infini.

   b. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à D.

5. Déterminer une équation de la tangente D' à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -1.
6. Construire $\mathscr{C}$ et D.
7. Calculer en cm^2 l'aire du domaine limité par D, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 0$.

Partie II

Pour tout entier n appartenant à $\mathbb{N}$, on désigne par E_n le domaine limité par la droite D, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation : $x = -n-1$ et $x = -n$.

1. Calculer en cm^2 l'aire $\mathscr{A}_n$ du domaine E_n.
   Montrer que la suite des réels $\mathscr{A}_n$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme $\mathscr{A}_0$ et la raison.
2. Calculer $S_n = \mathscr{A}_0 + \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 + \cdots + \mathscr{A}_n$.
   En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Partie III

1. Montrer qu'en tout point M d'abscisse a de la courbe $\mathscr{C}$ il existe une tangente à $\mathscr{C}$ dont on établira une équation en fonction de a.
2. Cette tangente rencontre l'asymptote D en un point N. On désigne par M' et N' les projections orthogonales de M et N sur l'axe des abscisses.
   a. Montrer que $M'N'$ est un nombre constant.
   b. En déduire une construction simple de la tangente en M.
   c. Construire la tangente D' définie dans la partie I. 5.