Baccalauréat S Antilles - Guyane septembre 2001

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Soit m un nombre réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcll} f(x) & = & m\sin x & \text{pour } x \in [0~;~\pi] \\ f(x) & = & 0 & \text{sinon.} \end{array}\right.$$

1. Déterminer le réel m tel que f soit une densité de probabilité.
2. Représenter f dans un repère orthonormé.
3. Soit X une variable aléatoire dont f est une densité de probabilité.
   Définir la fonction de répartition de X puis représenter graphiquement F dans un repère orthonormé.
4. Calculer la probabilité $p\left(\dfrac{\pi}{4} \leqslant X \leqslant \dfrac{3\pi}{4}\right)$.
5. Calculer les probabilités $p(X \geqslant 0)$ et $p(X \leqslant 0)$.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},~\vec{u},~\vec{v}\right)$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation d'inconnue z :
$$z^2 + 8z\sqrt{3} + 64 = 0.$$
2. On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes $a = -4\sqrt{3} - 4\text{i}$ et $b = -4\sqrt{3} + 4\text{i}$.
   Calculer les distances OA, OB et AB.
   En déduire la nature du triangle OAB.
3. On désigne par C le point d'affixe $c = \sqrt{3} + \text{i}$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. Déterminer l'affixe d du point D.
4. On appelle G le barycentre des points pondérés $(O~;~-1)$, (D ; 1) et (B ; 1).
   a. Montrer que le point G a pour affixe $g = -4\sqrt{3} + 6\text{i}$.
   b. Placer les points A, B, C, D et G sur une figure. (Unité graphique : 1 cm).
   c. Démontrer que le quadrilatère OBGD est un parallélogramme.
5. **a.** Justifier l'égalité $\dfrac{c-g}{a-g} = \dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   b. En déduire une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{GA}},~\overrightarrow{\text{GC}}\right)$, ainsi que la valeur du rapport $\dfrac{\text{GC}}{\text{GA}}$.
   Que peut-on en déduire concernant la nature du triangle AGC ?

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

1. Soient a et b des entiers naturels non nuls tels que $\text{PGCD}(a+b~;~ab) = p$, où p est un nombre premier.
   a. Démontrer que p divise a^2. (On remarquera que $a^2 = a(a+b) - ab$.)

b. En déduire que p divise a.

On constate donc, de même, que p divise b.

c. Démontrer que $\text{PGCD}(a,\ b) = p$.

2. On désigne par a et b des entiers naturels tels que $a \leqslant b$.

a. Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{lcr}\text{PGCD}(a,\ b) & = & 5\\ \text{PPCM}(a,\ b) & = & 170\end{array}\right.$$

b. En déduire les solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{lcr}\text{PGCD}(a+b,\ ab) & = & 5\\ \text{PPCM}(a,\ b) & = & 170\end{array}\right.$$

PROBLÈME **11 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$. On considère la fonction f, définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = -3 - \ln x + 2(\ln x)^2.$$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.

Partie A - Étude de la fonction f et tracé de la courbe $(\mathscr{C})$

1. a. Résoudre dans $]0\ ;\ +\infty[$ l'équation $f(x) = 0$. (On pourra poser $\ln x = X$).

b. Résoudre dans $]0\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $f(x) > 0$.

2. a. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b. Calculer $f'(x)$.

c. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.

3. Déterminer une équation de la tangente $(\mathscr{T})$ à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse $\text{e}^{\frac{5}{4}}$.

4. On se propose d'étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite $(\mathscr{T})$.

Pour cela, on considère la fonction φ, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = f(x) - \left(4\text{e}^{-\frac{5}{4}}x - \frac{41}{8}\right).$$

a. Montrer que $\varphi'(x) = \dfrac{4\ln x - 1}{x} - 4\text{e}^{-\frac{5}{4}}$ puis calculer $\varphi''(x)$.

b. Étudier le sens de variation de φ' sur $]0\ ;\ +\infty[$.

En déduire que, pour tout x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$, on a $\varphi'(x) \leqslant 0$.

c. Calculer $\varphi\left(\text{e}^{\frac{5}{4}}\right)$. Pour tout x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$ déterminer le signe de $\varphi(x)$.

En déduire la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite $(\mathscr{T})$.

5. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite $(\mathscr{T})$. (Unité graphique : 2 cm).

Partie B - Calcul d'une aire

1. Vérifier que la fonction h, définie par $x \mapsto x\ln x - x$, est une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2. On pose $\mathrm{I}_1 = \displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}} \ln x\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{I}_2 = \displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}} (\ln x)^2\,\mathrm{d}x$.

a. Calculer I_1.

b. En utilisant une intégration par parties, montrer que $\mathrm{I}_2 = \dfrac{5}{4}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}} - \dfrac{5}{\mathrm{e}}$.

c. Calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}} f(x)\,\mathrm{d}x$. En déduire l'aire, en unités d'aire, de l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan tels que $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant x \leqslant \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$ et $f(x) \leqslant y \leqslant 0$.