Durée : 4 heures

Baccalauréat S Antilles–Guyane septembre 1994

EXERCICE 1 **5 points**

À tout nombre complexe z, on associe le nombree complexe Z défini par :

$$Z = \frac{z-1+2\text{i}}{z-\text{i}} \quad (z \neq \text{i}).$$

1. Calculer Z pour, successivement : $z=1$, $z=1-\text{i}$.
2. On pose $Z = x+\text{i}y$ et $Z = X+\text{i}Y (x,\ y,\ X,\ Y$ sont des nombres réels).
   a. Calculer X et Y en fonction de x et y.
   b. Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe Z tels que Z soit un réel.
   c. Déterminer l'ensemble F des points M d'affixe Z tels que Z soit imaginaire pur.
   d. Représenter les ensembles E et F dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
3. On note A le point d'affixe $1-2\text{i}$, B le point d'affixe i et M le point d'affixe z. En considérant les vecteurs d'affixe $z-1+2\text{i}$ et $z-\text{i}$, exprimer un argument de Z. Retrouver géométriquement les résultats des questions 2. b. et 2. c.

EXERCICE 2 **5 points**

Soit ABC un triangle rectangle en A, dont l'hypoténuse mesure 4 cm. On désigne par O le milieu du segment [BC] et par (Ω) le cercle circonscrit au triangle ABC.
Soit I le milieu du segment [OA].
À tout point M du plan, on associe les points P et Q définis par :

$$\overrightarrow{\text{MP}} = 2\overrightarrow{\text{MA}} + \overrightarrow{\text{MB}} + \overrightarrow{\text{MC}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{MQ}} = 2\overrightarrow{\text{MA}} - \overrightarrow{\text{MB}} - \overrightarrow{\text{MC}}.$$

1. Montrer que I est le barycentre des points A, B, C affectés respectivement des coefficients 2, 1, 1.
2. Exprimer $\overrightarrow{\text{IP}}$ en fonction de $\overrightarrow{\text{IM}}$, puis $\overrightarrow{\text{MQ}}$ en fonction de $\overrightarrow{\text{IA}}$.
   En déduire que les points P et Q sont les images respectives de M par une homothétie et une translation dont on précisera les éléments.
3. Dans cette question, M décrit le cercle (Ω).
   a. Déterminer et construire les ensembles Γ_1 et Γ_2 que décrivent respectivement les points P et Q.
   b. Montrer que le segment [PQ] conserve une longueur constante.
   c. Montrer que le segment [PQ] contient toujours le point O′ symétrique de O par rapport à A.

PROBLÈME **11 points**

On considère les fonctions dépendant d'un entier naturel n et définies sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f_0(x) & = & \dfrac{1}{1+x+x^2} \\ f_n(x) & = & \dfrac{x^n}{1+x+x^2} \quad \text{pour tout } n \geqslant 1 \end{array}\right.$$

On pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
Dans la partie A, on étudie la fonction f_0 et sa fonction dérivée.
Dans la partie B, on étudie la suite des nombres réels I_n.

Partie A

1. Étudier le sens de variation de la fonction f_0.
   Construire la courbe représentative de f_0 dans un repère orthonormal (unité graphique : 6 cm) en précisant les tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.
2. On note, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$: $f(x) = -f_0(x)$. Calculer la fonction dérivée de f et montrer que f est décroissante sur $[0\,;\,1]$.
   En déduire que, pour tout x appartenant à $[0\,;\,1]$, on a : $\dfrac{1}{3} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

Partie B

(On ne cherchera pas à calculer I_n)

1. Calculer : $I_0 + I_1 + I_2$ et $I_0 + 2I_1$.
2. Étudier, pour tout entier n et pour x appartenant à $[0\,;\,1]$, le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.
   En déduire que la suite (I_n) est décroissante.
3. Montrer que, pour tout entier n et pour tout x appartenant à $[0\,;\,1]$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant x^n$.
   En déduire que : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   Déterminer la limite de la suite (I_n)
4. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout entier n :

   $$I_n = \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 f(x)x^{n+1}\,\mathrm{d}x$$

   (f étant la fonction définie dans le A. 2.)

   b. En utilisant l'encadrement obtenu dans la question A. 2, montrer que, pour tout entier n :

   $$\frac{1}{3(n+2)} \leqslant \int_0^1 f(x)x^{n+1}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+2}$$

   puis que :

   $$\frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{3(n+1)(n+2)} \leqslant I_n \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

   c. À partir de quel entier n_0 cet encadrement conduit-il à une valeur approchée au centième près de I_n ?

   d. Déterminer alors la valeur approchée au centième près de I_n pour $n = n_0$.