Durée : 4 heures

Baccalauréat C & E Antilles juin 1969

EXERCICE 1

Soit, dans le corps des complexes,

$$\mathrm{j} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad k = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

1. Placer leurs images dans le plan complexe et démontrer que :
   - **a.** les racines de l'équation $x^3 - 1 = 0$ sont 1, j, k.
   - **b.** $k = \mathrm{j}^2$ et $\mathrm{j} = k^2$.
2. Montrer que l'ensemble E = $\{1, \; , \; k\}$ est un sous-groupe du groupe multiplicatif des nombres complexes non nuls.

EXERCICE 2

Résoudre, dans le corps des réels, l'équation

$$4^x - 3 \times 2^{x+2} - 2^6 = 0.$$

PROBLÈME

Partie A

Le plan est rapporté au système d'axes quelconques $x'Ox$ et $y'Oy$. On étudie la transformation plane $\mathscr{T}$ définie par le système

$$M(x\,;\,y) \longmapsto M'(X\,;\,Y),$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} X & = & x - y, \\ Y & = & 2x - y. \end{array}\right.$$

1. Montrer que $\mathscr{T}$ est une bijection et admet un point invariant.
2. S étant la symétrie de centre 0, $\mathscr{I}$ la transformation identique et 'G-I la transformation réciproque de $\mathscr{T}$, montrer que

   $$\mathscr{T}^{-1} = \mathscr{T} \circ S = S \circ \mathscr{T}.$$

   Montrer que $\mathscr{T}$, $\mathscr{T}^2 = \mathscr{T} \circ \mathscr{T}$, $\mathscr{T}^3 = \mathscr{T} \circ \mathscr{T} \circ \mathscr{T}$ et $\mathscr{T}^4 = \mathscr{T} \circ \mathscr{T} \circ \mathscr{T} \circ \mathscr{T}$ forment un groupe commutatif pour la loi de composition des transformations planes ; établir la table de cette loi.
3. Étudier la transformée par $\mathscr{T}$ d'une droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$.
   Vérifier qu'il n'existe aucune droite parallèle à sa transformée.
   Quelles sont les transformées de droites parallèles aux axes de coordonnées ?
4. On pose :

   $$X = \operatorname{tg}\beta \quad \text{et} \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha.$$

   Calculer $\dfrac{Y}{X}$ en fonction de α. Étudier et représenter les variations de la fonction f :

$$\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ +\frac{\pi}{2}\right[, \quad f(\alpha) = \frac{Y}{X}.$$

Représenter les variations de la fonction dans un repère à axes perpendiculaires.

5. Soit l'ensemble (H) des points $M(x\ ;\ y)$, d'équation

$$(x-2)(y-1) = 1.$$

Construire (H). Trouver l'équation du transformé de (H).

Par un changement de repère, ramener cette équation à $X_1 \times Y_1 = 1$ et construire le transformé.

Partie B

Le plan est maintenant rapporté à un système d'axes orthonormé.

1. La transformation $\mathcal{T}$ est-elle une isométrie ? Trouver l'ensemble des points M du plan tels que $\mathrm{O}M = \mathrm{O}M'$.

Trouver l'ensemble des points M du plan tels que les directions $\mathrm{O}M$ et $\mathrm{O}M'$ soient perpendiculaires.

2. Étudier la courbe transformée du cercle de centre O et de rayon $R = \sqrt{5}$.

(On pourra considérer une équation explicite

$$Y = A\left[X \pm \sqrt{B - X^2}\right]).$$

N. B. - *Les questions sont indépendantes les unes des autres.*