

Baccalauréat C Antilles–Guyane juin 1971

EXERCICE 1

Un nombre entier naturel N s'écrit $\overline{abc0}$ en base 5, et \overline{abc} en base 12, où a , b et c sont des entiers tels que

$$0 < a < 5, \quad 0 \leq b < 5, \quad 0 \leq c < 5.$$

Déterminer les entiers a , b , c et N . (On pourra utiliser la congruence modulo 4).

EXERCICE 2

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$(-4 - 2i)z^2 + (7 - i)z + 1 + 3i = 0$$

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de chaque racine.

PROBLÈME

Soit E l'ensemble des fonctions numériques définies sur l'intervalle $] -2 ; +2[$. On rappelle que E , muni de l'addition, et de la multiplication externe par les réels, ainsi définies :

$$\begin{aligned} f + g : x &\longmapsto f(x) + g(x) && \text{pour tout } (f, g) \in E \times E \\ \lambda f : x &\longmapsto \lambda(x) && \text{pour tout } (\lambda, f) \in \mathbb{R} \times E \end{aligned}$$

est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

1. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par les deux fonctions f_1 , f_2 , ainsi définies :

$$f_1(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}, \quad f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

pour tout $x \in] -2 ; +2[$.

Montrez que $(f_1 ; f_2)$ est une base de F .

2. Soit P le plan vectoriel euclidien orienté et soit $(\vec{i} ; \vec{j})$ une base orthonormée directe de P .

On désigne par T l'ensemble des transformations orthogonales de P , dont la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, relativement à la base $(\vec{i} ; \vec{j})$, vérifie $(a-b)^2 = 1$.

Déterminer tous les éléments de T (préciser les angles de rotation, et les axes de symétries).

3. Soit φ l'endomorphisme de F , dont la matrice par rapport à la base $(f_1 ; f_2)$ est la matrice A , représentant la rotation vectorielle d'angle $+\frac{\pi}{2}$ dans P , par rapport à la base $(\vec{i} ; \vec{j})$.

Déterminer l'image par φ de la fonction $g = 2f_1 + f_2$.

Étudier la fonction numérique : $x \longmapsto f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$.

Tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé. En déduire le tracé de la courbe (\mathcal{C}) d'équation

$$x(y^2 + 1) + 2(y^2 - 1) = 0.$$

Etudier la limite de $\frac{f'(x)}{x-2}$ lorsque x tend vers 2. La courbe (\mathcal{C}) possède-t-elle une tangente au point $(2; 0)$?

4. Écrire l'équation de la tangente D à la courbe (\mathcal{C}), au point d'abscisse $x = 1$, et d'ordonnée $y > 0$. Déterminer l'intersection de (\mathcal{C}) et de la droite D. Préciser la position de la courbe (\mathcal{C}) par rapport à la droite D.