

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1982 Antilles–Guyane ∞

EXERCICE 1

On considère l'expression

$$f(z) = z^3 - (1 + 14i)z^2 - 2z(29 - i) + 68i$$

où z est un nombre complexe.

1. Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure que l'on notera a . Montrer qu'il existe des coefficients complexes b et c tels que

$$f(z) = (z - a)(z - b)(z - c).$$

En déduire les autres solutions de l'équation. On notera b la solution dont la partie réelle est négative, c l'autre.

2. Soit A, B, C, les images des nombres complexes a, b, c dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé.
Déterminer les éléments géométriques de la similitude directe laissant A invariant et transformant B en C.

EXERCICE 1

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par

$$f(x) = -x^3 + x^3 \text{Log } x.$$

1. Étudier la fonction f et construire sa courbe représentative C dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé.
2. Soit a un nombre strictement positif et strictement inférieur à e . En utilisant une intégration par parties, trouver l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations $x = a$ et $x = e$.
Cette aire admet-elle une limite lorsque a tend vers 0? La déterminer si elle existe.

PROBLÈME

Partie A

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe de E .

1. Soit φ , l'endomorphisme de E défini par

$$\varphi(\vec{i}) = \vec{j} \quad ; \quad \varphi(\vec{j}) = -\vec{i} \quad ; \quad \varphi(\vec{k}) = -\vec{k}.$$

Démontrer que φ est une isométrie vectorielle de E . Déterminer l'ensemble des vecteurs invariants par φ .

2. Montrer que $\varphi \circ \varphi$ est une symétrie vectorielle orthogonale par rapport à une droite D que l'on déterminera.

3. Soit P le plan vectoriel orthogonal à D . On appelle σ la symétrie vectorielle orthogonale par rapport au plan P .
Montrer que $\varphi = r \circ \sigma = \sigma \circ r$ où r est une rotation vectorielle dont on déterminera les éléments.
On précisera l'orientation choisie pour la mesure de l'angle.

Partie B

Soit \mathcal{E} un espace affine euclidien associé à E , rapporté au repère orthonormé direct $R = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points O', A, B' de \mathcal{E} dont les coordonnées dans R sont :

$$O'(a; 0; a) \quad A(a; 0; 0) \quad B'(0; 0; a)$$

où a est un réel strictement positif.

Soit f l'application affine de \mathcal{E} dont l'endomorphisme associé est φ et qui transforme O en O' .

1. Définir analytiquement f . Préciser les coordonnées des points A' et B tels que

$$A' = f(A), B' = f(B).$$

Montrer qu'il existe un seul point invariant I par f .

2. En utilisant A 3., montrer qu'il existe deux isométries affines h et g , non égales à l'identité de \mathcal{E} , telles que

$$f = h \circ g = g \circ h$$

Donner la nature et les éléments caractéristiques de h et de g .

3. Soit ℓ un réel strictement positif. On note \mathcal{P} le plan passant par I de direction P et C_ℓ l'ensemble des points M de \mathcal{E} tels que

$$\|\overrightarrow{Mf(M)}\| = 1.$$

Montrer que C_ℓ est globalement invariant par f . Montrer que l'intersection de C_ℓ et \mathcal{P} est un cercle dont on précisera les coordonnées du centre et le rayon.

4. On note G l'ensemble des points M de \mathcal{E} tels que

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{Of(M)} = 0.$$

Montrer qu'une équation de G dans \mathbb{R} est

$$ax - z^2 + az = 0.$$

Montrer que l'intersection de G et du plan d'équation $y = 0$ est une parabole dont on déterminera le sommet et l'axe de symétrie.

Construire cette parabole dans le cas où $a = 4$.

Partie C

On considère les triplets $F = \{O; A; B\}$ et $F' = \{O'; A'; B'\}$.

On se propose de déterminer l'ensemble Q des isométries affines de \mathcal{E} qui transforment F en F' .

1. Montrer que Q est non vide.
2. Soit q un élément de Q .
 - a. Montrer que $q(O) = O'$.

- b.** Déterminer l'image par q du milieu du bipoint (A, B) .
- c.** Soit X l'endomorphisme associé à q . Déterminer les images possibles de \vec{i} et \vec{j} par X . En déduire que P est globalement invariant par X . Montrer alors, que

$$X(\vec{k}) = \vec{k} \quad \text{ou} \quad X(\vec{k}) = -\vec{k}.$$

- 3.** Déterminer les quatre endomorphismes qui peuvent être associés à q .
- 4.** Déterminer analytiquement tous les éléments de Q .
Vérifier qu'il existe, dans Q , deux déplacements.
Déterminer leur nature et éventuellement leur forme réduite.