

∞ Baccalauréat C Antilles–Guyane juin 1990 ∞

EXERCICE 1

4 points

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère l'application f qui associe, au point M d'affixe z , le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = i\bar{z}.$$

1. Montrer que $f = R \circ S$ où S est la réflexion d'axe $(O; \vec{u})$ et R est une rotation dont on précisera les éléments.
2. En utilisant une décomposition de R en composée de deux réflexions, montrer que f est une réflexion dont on précisera l'axe.
3. Soit g l'application du plan dans lui-même qui, au point M d'affixe z , associe le point M'' d'affixe z'' tel que :

$$z'' = iz + 1 + i.$$

- a. Caractériser l'application T telle que : $g = T \circ f$.
- b. En déduire une construction géométrique, pour tout point M du plan, du point M'' , image de M par g .
- c. Montrer que, pour tout point M du plan, le milieu du segment $[MM'']$ appartient à une droite fixe.

EXERCICE 2

4 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On note A le point d'affixe $4 + 2i$, B le point d'affixe $-2 - i$ et M le point d'affixe z .

Soit le nombre complexe

$$Z = \frac{z - 4 - 2i}{z + 2 + i}.$$

1. Donner une signification géométrique de $|Z|$ et de $\arg Z$.
2. Préciser la nature, puis construire :
 - a. l'ensemble des points M d'affixe z , tels que $|Z| = 1$;
 - b. l'ensemble des points M d'affixe z , tels que $|Z| = 2$;
 - c. l'ensemble des points M d'affixe z , tels que Z est un réel positif;
 - d. l'ensemble des points M d'affixe z , tels que Z est un imaginaire pur.

EXERCICE 2

4 points

Enseignement de spécialité

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on considère la courbe \mathcal{C} dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x &= \cos^2 t + \cos t - 1 \\ y &= (1 + \cos t) \sin t. \end{cases}$$

1. Que peut-on dire des points M et M' de \mathcal{C} de paramètres respectifs t et $-t$?
En déduire qu'il suffit de construire la partie de \mathcal{C} correspondant aux valeurs de t de l'intervalle $[0; \pi]$ pour pouvoir obtenir \mathcal{C} .
2. Étudier les variations de x et y lorsque t appartient à l'intervalle $[0; \pi]$.
3. Tracer la courbe \mathcal{C} en précisant les tangentes à \mathcal{C} aux points de paramètres $0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$.
On admettra qu'au point de paramètre π la tangente à \mathcal{C} est parallèle à l'axe des abscisses.

N. B. : On prendra 6 cm comme unité de longueur.

PROBLÈME**12 points**

Partie I Soit f la fonction définie, pour tout nombre réel x , par :

$$f(x) = \ln(1 + e^{-x})$$

On note \mathcal{C} la représentation graphique de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer les limites de f lorsque x tend vers $-\infty$ et $+\infty$.
Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.
2. Montrer que \mathcal{C} admet une asymptote D d'équation :

$$y = -x$$

et préciser la position de D par rapport à \mathcal{C} .

3. Tracer D et \mathcal{C} (unité graphique : 4 cm). On construira, en particulier, la tangente à \mathcal{C} au point de \mathcal{C} d'abscisse 0.
4. Soit x_0 un nombre réel non nul.
On note M et N les points de \mathcal{C} d'abscisses respectives x_0 et $-x_0$.
 - a. Vérifier que : $f(x_0) - f(-x_0) = -x_0$.
En déduire que la droite (MN) garde une direction fixe que l'on précisera.
 - b. Montrer que l'on a :

$$f'(x_0) + f'(-x_0) = -1.$$

En déduire que les tangentes à \mathcal{C} en M et N se coupent sur l'axe des ordonnées.

- c. Illustrer sur la courbe \mathcal{C} les résultats précédents en prenant $x_0 = 1$.

Partie II On se propose dans cette partie d'étudier la suite (u_n) de nombres réels u_n , définie par :

$u_1 = 1 + \frac{1}{e}$ et, pour tout entier naturel non nul n , par :

$$u_{n+1} = u_n \left(1 + \frac{1}{e^{n+1}} \right).$$

1. Montrer que, pour tout nombre réel t strictement positif, on a :

$$t - \frac{t^2}{2} < \ln(1+t) < t.$$

On pourra étudier brièvement les fonctions u et v définies pour tout réel t positif par :

$$u(t) = \ln(1+t) - t \quad \text{et} \quad v(t) = \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{2}.$$

2. En déduire que, pour tout nombre réel x , on a :

$$e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} < f(x) < e^{-x}. \quad (1)$$

3. a. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

b. Montrer que, pour tout entier strictement positif, on a :

$$\ln u_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n). \quad (2)$$

c. On pose :

$$S_1 = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \cdots + \frac{1}{e^n} \quad \text{et} \quad S_2 = \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^4} + \cdots + \frac{1}{e^{2n}}$$

À l'aide des relations (1) et (2), montrer que :

$$S_1 - \frac{1}{2}S_2 < \ln u_n < S_1$$

4. a. Si a est un nombre réel strictement supérieur à 1, calculer la somme

$\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \cdots + \frac{1}{a^n}$ et montrer qu'elle admet une limite quand n tend vers $+\infty$ que l'on déterminera.

b. Montrer que la suite (u_n) est majorée et convergente. Soit ℓ sa limite.

c. Montrer que :

$$\frac{2e+1}{2(e^2-1)} \leq \ln \ell \leq \frac{1}{e-1}.$$

En déduire une valeur approchée de ℓ à 0,1 près.