**Durée : 4 heures**

# Baccalauréat C septembre 1984 Antilles

**EXERCICE 1**

Soit la suite $(u_n)$ à termes positifs définie sur $\mathbb{N}^\star$ par $u_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 2$ par

$$n^2 u_n^2 - (n-1)^2 u_{n-1}^2 = n.$$

1. On considère la suite $(v_n)$ définie sur $\mathbb{N}^\star$ par $v_n = n^2 u_n^2$. Déterminer $v_n$ en fonction de $n$.
2. En déduire que $(u_n)$ est convergente et déterminer sa limite.

**EXERCICE 2**

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points A, B, C de coordonnées : A$(3 ; 2 ; 3)$, B$(9 ; 2 ; 11)$, C$(6 ; -3 ; 7)$.

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\text{AC}}$ et $\overrightarrow{\text{BC}}$ sont orthogonaux.
2. Donner une équation du plan P passant par les points A, B et C.
3. Donner une équation de la sphère S de diamètre [AB] et préciser les coordonnées de son centre et son rayon.

**PROBLÈME**

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $\varphi$ une application continue de I dans I, involutive, c'est-à-dire telle que $\varphi \circ \varphi = \text{Id}$ où Id est l'application identique de I.
On se propose de déterminer et d'étudier dans certains cas, des applications $f$ de I dans $\mathbb{R}$ vérifiant la (E) relation :

$$f'(x) = f(x) + f[\varphi(x)] \quad \text{pour tout réel } x \text{ de I}$$

**A** On considère les fonctions numériques $\varphi_1$, $\varphi_2$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

- $\varphi_1(x) = a - x$ ($a$ nombre réel fixé)
- $\begin{cases} \varphi_2(x) = -\ln(x+1) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \varphi_2(x) = \text{e}^{-x} - 1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

1. Montrer que $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont involutives.
   Étudier leur continuité et leur dérivabilité.
2. Étudier les variations de $\varphi_2$. Tracer sa courbe représentative $C$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

**B** On suppose qu'il existe une fonction $f$ vérifiant (E).

1. Montrer que $f'$ est continue sur I et que si $\varphi$ est dérivable sur I, alors $f'$ est dérivable sur I.
2. Établir la relation : pour tout réel $x$ de I,

$$f'[\varphi(x)] = f'(x).$$

   En déduire que si $\varphi$ est dérivable sur I, alors $f$ vérifie la relation :

$$f''(x) - \left[1 + \varphi'(x)\right] f'(x) = 0 \qquad \text{(F)}$$

   pour tout réel $x$ de I.

**3.** On pose $\varphi = \varphi_1$.

**a.** Déterminer l'ensemble des fonctions $f$ vérifiant (F).

**b.** Préciser, parmi celles-ci, celles qui vérifient aussi (E).

**C** On revient au cas général où $\varphi$ est une fonction dérivable et involutive sur I. On suppose de plus qu'il existe un point unique $x_0$ de I tel que $\varphi(x_0) = x_0$.

**1.** Montrer que la fonction $f$ définie sur I par :

$$f(x) = A\int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{t+\varphi(t)}\,\mathrm{d}t + B$$

où $A$ et $B$ sont des constantes réelles, vérifie la relation (F).

**2.** Montrer que les fonctions $x \longmapsto \mathrm{e}^{x+\varphi(x)}$ et $x \longmapsto \displaystyle\int_{x_0}^{\varphi(x)} \mathrm{e}^{t+\varphi(t)}\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{t+\varphi(t)}\,\mathrm{d}t$ sont des primitives sur I d'une même fonction. En déduire que

$$\int_{x_0}^{\varphi(x)} \mathrm{e}^{t+\varphi(t)}\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{t+\varphi(t)}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{x+\varphi(x)} - \mathrm{e}^{2x_0}.$$

**3.** En déduire la relation qui doit lier $A$ et $B$ pour que $f$ vérifie la relation (E).

**D** On pose $\varphi = \varphi_2$.

**1.** Montrer que 0 est la seule valeur de $x$ vérifiant $\varphi_2(x) = x$.

**2.** Déterminer en appliquant les résultats du C, des fonctions $f$ vérifiant (E).

**3.** Soit $g$ la fonction définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcll} g(x) & = & 1+2\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t-\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t & \text{si } x \geqslant 0\\ g(x) & = & 1+2\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t+\mathrm{e}^{-t}-1}\,\mathrm{d}t & \text{si } x \leqslant 0 \end{array}\right.$$

**a.** Montrer que $g$ vérifie (E). Préciser $g'(0)$.

**b.** Montrer que si $t \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{t-\ln(1+t)} \geqslant \dfrac{1}{1+t}$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

**c.** Montrer que $\mathrm{e}^{-t} + t - 1 \geqslant 0$ pour tout $t$ réel.

En déduire que $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t+\mathrm{e}^{-t}-1}\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \leqslant 0$.

En déduire $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x)$.

**d.** Donner le tableau de variation de $g$.