

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Antilles–Guyane septembre 1990 ∞

EXERCICE 1

4 points

1. a. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n + 2^{-n})}{2n} = 0.$$

- b. En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + n2^n)}{2n} = \frac{\ln 2}{2}.$$

2. Pour tout entier naturel n , on pose

$$u_n = \int_0^1 \frac{2^n x}{1 + 2^n x} dx.$$

- a. Calculer u_0 .
b. Calculer u_n pour tout entier n supérieur à 1.
c. En utilisant les questions précédentes, déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n.$$

EXERCICE 2

4 points

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère l'application f , qui associe, au point M d'affixe z , le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = i\bar{z}.$$

1. Montrer que $f = R \circ S$ où S est la réflexion d'axe (O, \vec{u}) et R une rotation dont on précisera les éléments.
2. En utilisant une décomposition de R en composée de deux réflexions, montrer que f est une réflexion dont on précisera l'axe.
3. Soit g l'application du plan dans lui-même qui, au point M d'affixe z , associe le point M'' d'affixe z'' tel que

$$z'' = i\bar{z} + 1 + i.$$

- a. Caractériser l'application T telle que $g = T \circ f$.
b. En déduire une construction géométrique, pour tout point M du plan, du point M'' , image de M par g .
c. Montrer que, pour tout point M du plan, le milieu du segment $[MM'']$ appartient à une droite fixe.

PROBLÈME**12 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ unité : 4 cm. On note A le point de coordonnées (1 ; 0) et A' le point de coordonnées (-1 ; 0).

Soit F l'application qui, à tout point M du plan privé de la droite (O, \vec{i}) fait correspondre le point M' orthocentre du triangle OAM.

I.

1. Déterminer l'image par F :

- a. de la droite (O, \vec{j}) privée de O ;
- b. de la parallèle D à la droite (O, \vec{j}) passant par A privée de A ;
- c. du cercle de diamètre [OA] privé des points O et A.

2. Montrer que, dans le plan privé des droites (O, \vec{i}) et (O, \vec{j}) , l'application $F \circ F$ est l'application identique.

II. Dans cette partie, on se propose d'étudier l'image par F , notée S^* , du cercle de centre O passant par A privé des points A et A', noté C^* .

1. *Représentation paramétrique de S^**

Soit M un point de C^* , on note t la mesure principale de l'angle (\vec{OA}, \vec{OM}) .

- a. Montrer que l'angle (\vec{OA}, \vec{OM}) a pour mesure $\frac{t}{2}$ modulo π .
- b. Soit S la courbe dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = f(t) = \cos t \\ y = g(t) = \cos t \cdot \tan \frac{t}{2} \end{cases} \quad t \in]-\pi ; \pi[$$

Montrer que S^* est la courbe S privée de A.

2. Construction de S

- a. Montrer que l'on peut réduire l'étude des fonctions f et g à l'intervalle $[0 ; \pi[$.
- b. Calculer $g'(t)$ et donner son expression en fonction de $u = \tan \frac{t}{2}$.

On rappelle que : $\cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ et $\sin t = \frac{2u}{1+u^2}$.

Étudier le signe de $g'(t)$ sur l'intervalle $[0 ; \pi[$. (On pourra poser $X = u^2$.)

Donner les valeurs exactes de $f(\alpha)$ et $g(\alpha)$ où α est le réel de $[0 ; \pi[$ tel que

$$g'(\alpha) = 0.$$

- c. Dresser le tableau des variations simultanées de f et g sur l'intervalle $[0 ; \pi[$.
Déterminer le point de S de paramètre $\frac{\pi}{2}$ et la tangente en ce point à la courbe S.
Déterminer les points d'intersection de S^* et C^* .
- d. Tracer la courbe S.